Podstawowe dane dotyczące niepewności pomiaru konwencji GUM

1. Wprowadzenie

W roku 1993, po wielu latach pracy ekspertów sygnowanych przez siedem międzynarodowych organizacji (znane pod akronimami: BIPM, IEC, IFCC, ISO, IUPAC, IUPAP i OIML), opublikowany został dokument *Guide to Expression of Uncertainty of Measurement* zwanego w skrócie *Przewodnikiem*, dotyczące terminologii i sposobu określania niepewności w pomiarach. odpowiedni „Przewodnik" [1]. Wydanie drugie poprawione z 1995 r., wydane przez Międzynarodową Organizację Normalizacyjną (ISO) stało się podstawą do tłumaczeń na inne języki. Dokonano jego przekładu na język polski [2]. Stosowanie konwencji GUM w zakresie obliczania i podawania niepewności pomiarów jest obowiązkiem, podobnym do obowiązku stosowania układu SI.

2. Ogólne terminy metrologiczne

Błąd pomiaru – różnica między wynikiem pomiaru a wartością wielkości mierzonej (wartością prawdziwą). Bywa też nazywany **błędem bezwzględnym pomiaru.**

Błąd względny – stosunek błędu pomiaru do wartości wielkości mierzonej.

Błąd przypadkowy – różnica między wynikiem pomiaru a średnią arytmetyczną nieskończonej liczby wyników pomiarów tej samej wielkości mierzonej, wykonanych w warunkach powtarzalności. Błąd przypadkowy jest wynikiem nieprzewidywalnych czasowych lub przestrzennych zmian czynników przypadkowych wpływających na pomiar; daje on przyczynek zwiększający rozrzut wyników.

Błąd systematyczny - różnica między średnią arytmetyczną nieskończonej liczby pomiarów tej samej wielkości mierzonej, wykonanych w warunkach powtarzalności, a wartością wielkości mierzonej. Błąd systematyczny jest również wynikiem czasowych lub przestrzennych zmian czynników wpływających na pomiar, ale te czynniki można rozpoznać. Obowiązkiem eksperymentatora jest wprowadzenie poprawki kompensującej błąd systematyczny. Zatem prawdziwy błąd systematyczny wynika z nieidealności przyrządów pomiarowych i/lub mierzonych obiektów. Przewodnik uważa go za zjawisko losowe, gdyż nie znamy a priori jego wielkości i znaku, tak samo jak w przypadku błędu przypadkowego. Można mu przypisać rozkład prawdopodobieństwa.

Wynik surowy – wynik pomiaru przed korekcją błędu systematycznego.

Wielkość (mierzalna) – cecha zjawiska, ciała lub substancji, którą można wyróżnić jakościowo i wyznaczyć ilościowo. Termin "wielkość" może się odnosić do wielkości w znaczeniu ogólnym (długość, czas, masa, temperatura, opór elektryczny) lub do wielkości w znaczeniu szczególnym, to znaczy do "wielkości określonej" (długość danego pręta, opór elektryczny danej próbki drutu)

Wartość (wielkości) – wyrażenie ilościowe wielkości.

Wartość prawdziwa (wielkości) – wartość zgodna z definicją wielkości określonej. Jest to wartość, jaką uzyskałoby się jako wynik bezbłędnego pomiaru. Jest ona ze swej natury nieznana. W Przewodniku "*wartość prawdziwa*" i "*wartość wielkości mierzonej*" traktowane są jak synonimy.

Wartość umownie prawdziwa – wartość przypisana wielkości określonej i uznana, niekiedy umownie, jako wartość wyznaczona z niepewnością akceptowaną w danym zastosowaniu. Przykładem może być zalecenie przez CODATA (w 1986 r.) następującej wartości dla stałej Avogadro: $N_A = 6{,}0221367 \cdot 10^{23}\ \mathrm{mol}^{-1}$. Wartość umownie prawdziwa jest niekiedy nazywana "*wartością przypisaną*", "*najlepszym oszacowaniem wartości*", "*wartością umowną*" lub "*wartością odniesienia*".

Pomiar – zbiór operacji mających na celu wyznaczenie wartości wielkości.

(Dawniej: **Pomiar** wielkości fizycznej polega na porównaniu jej z wielkością tego samego rodzaju przyjętą za jednostkę. Pomiary wielkości fizycznych dzielimy na bezpośrednie i pośrednie. **Pomiary bezpo-**

średnie są najprostsze – polegają wprost na porównaniu danej wielkości z odpowiednią miarą wzorcową np. pomiar wymiarów ciała za pomocą linijki, suwmiarki itp., pomiar czasu trwania jakiegoś procesu przy użyciu stopera, pomiar natężenia prądu amperomierzem. W przypadku **pomiarów pośrednich** wartość badanej wielkości wyznaczana jest na podstawie pomiarów bezpośrednich innych wielkości fizycznych, które są z nią związane znanym nam prawem fizycznym.)

Zasada pomiaru – naukowa podstawa pomiaru.

Metoda pomiarowa – logiczny ciąg wykonywanych podczas pomiaru operacji, opisanych w sposób ogólny.

Procedura pomiarowa – zbiór operacji opisanych w sposób szczegółowy i realizowanych podczas wykonywania pomiarów zgodnie z daną metodą.

Wielkość mierzona – wielkość określona, stanowiąca przedmiot pomiaru.

Wielkość realizowana – w przypadku idealnym powinna być całkowicie zgodna z definicją wielkości mierzonej. Często jednak wielkość taka nie może być zrealizowana i mierzy się wielkość będącą jedynie przybliżeniem wielkości mierzonej. Przypuśćmy na przykład, że wielkością mierzoną jest grubość danego arkusza materiału w określonej temperaturze. Obiekt badany przenosi się do miejsca o temperaturze zbliżonej do wymaganej i mierzy się w określonym miejscu za pomocą mikrometru jego grubość - wynik tego pomiaru jest wielkością zrealizowaną.

Wynik pomiaru – wartość przypisana wielkości mierzonej, uzyskana drogą pomiaru.

Wynik surowy – wynik pomiaru przed korekcją błędu systematycznego.

Wynik poprawiony – wynik pomiaru po korekcji błędu systematycznego. Wynik pomiaru koryguje się ze względu na wszystkie uznane za znaczące oddziaływania systematyczne. Chociaż końcowy, poprawiony wynik jest czasem uważany za najlepsze oszacowanie wartości "prawdziwej" wielkości mierzonej, to w rzeczywistości jest on po prostu najlepszym oszacowaniem wartości wielkości, którą zamierzano zmierzyć.

Dokładność pomiaru – stopień zgodności wyniku pomiaru z wartością prawdziwą wielkości mierzonej. Nie należy stosować terminu "precyzja" zamiast "dokładność".

Powtarzalność (wyników pomiarów) – stopień zgodności wyników kolejnych pomiarów tej samej wielkości mierzonej, wykonywanych w tych samych warunkach pomiarowych.

Odtwarzalność (wyników pomiarów) – stopień zgodności wyników pomiarów tej samej wielkości mierzonej, wykonywanych w zmienionych warunkach.

Odchylenie standardowe eksperymentalne – parametr $s(q_k)$ charakteryzujący rozrzut wyników serii n pomiarów tej samej wielkości mierzonej, określony wzorem

$$s(q_k) = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}\left(q_k - \overline{q}\right)^2}\,,$$

w którym q_k oznacza wynik k. pomiaru, a $\overline{q}$ średnią arytmetyczną n rozważanych wyników. Wyrażenie $s(q_k)/\sqrt{n}$ jest estymatorem odchylenia standardowego rozkładu zmiennej losowej $\overline{q}$ i jest nazywane **odchyleniem standardowym eksperymentalnym średniej.**

Niepewność pomiaru – parametr związany z wynikiem pomiaru**,** charakteryzujący rozrzut wartości, które można w uzasadniony sposób przypisać wielkości mierzonej. Podczas gdy dokładne wartości składowych błędu wyniku pomiaru są nieznane i niepoznawalne, to niepewności związane z oddziaływaniami przypadkowymi i systematycznymi można obliczyć. Nawet jednak gdy obliczone niepewności są małe, to ciągle nie ma gwarancji, że błąd wyniku pomiaru jest mały, ponieważ podczas określania poprawki lub oceny stopnia nieznajomości zjawiska, pewne oddziaływania systematyczne mogły zostać pominięte, gdyż nie zostały rozpoznane.

3. Wyrażanie niepewności pomiaru – konwencja GUM

Wszystkie pomiary obarczone są **niepewnościami pomiaru**, które można nieograniczenie zmniejszać, lecz nie można ich całkowicie wyeliminować.
Przewodnik GUM przyjmuje definicję:
Niepewność pomiaru – parametr związany z wynikiem pomiaru**,** charakteryzujący rozrzut wartości, który można w uzasadniony sposób przypisać wielkości mierzonej.
Słowo „*niepewność*", bez dodatkowych określeń, ma podwójne znaczenie: zarówno pojęcia ogólnego, jak i miary ilościowej. W przypadku stosowania terminu w znaczeniu ilościowym dodaje się odpowiedni przymiotnik. Stosowane są następujące terminy o nowym znaczeniu:

1) **Niepewność standardowa** (standard uncertainty) wyniku pomiaru bezpośredniego wielkości X. Symbol niepewności standardowej u (uncertainty), którego możemy używać na trzy sposoby: $\boldsymbol{u}$**,** $\boldsymbol{u(x)}$**,** $\boldsymbol{u}$**(stężenie NaCl)**. Przewodnik nie wprowadził osobnego symbolu dla pojęcia niepewności względnej. Zgodnym z logiką symbolem jest u_r (indeks r od ang. relative) zalecony do użytku w USA przez National Institute of Standards and Technology.

2) **Złożona niepewność standardowa** $\boldsymbol{u_c(y)}$ (combined standard uncertainty) jest niepewnością wyników pomiarów pośrednich $y = f(x_1, x_2, x_3, ..., x_k, ..., x_K)$, gdzie symbole $x_1, x_2, x_3, ..., x_k, ..., x_K$ oznaczają K wielkości mierzonych bezpośrednio. Jest ona obliczana (wyznaczana) z prawa przenoszenia niepewności pomiaru.

3) **Niepewność rozszerzona** $\boldsymbol{U}$ lub $\boldsymbol{U(y)}$ (expanded uncertainty) jest miarą pewnego „*przedziału ufności*" otaczającego wynik pomiaru pośredniego. Oczekuje się, że w przedziale tym jest zawarta duża część wartości, które w rozsądny sposób można przypisać wielkości mierzonej. Wartość U oblicza się mnożąc złożoną niepewność standardową przez bezwymiarowy współczynnik rozszerzenia k.

4) **Współczynnik rozszerzenia** $\boldsymbol{k}$ (coverage factor) jest mnożnikiem złożonej niepewności standardowej, stosowanym w celu uzyskania niepewności rozszerzonej.

5) **Ocena niepewności metodą typu A** (type A evaluation of uncertainty) – oparta na metodzie określania niepewności pomiaru drogą analizy statystycznej serii wyników pomiarów.

6) **Ocena niepewności metodą typu B** (type B evaluation of uncertainty) – obliczana na podstawie rozkładu prawdopodobieństwa przyjętego przez eksperymentatora (prawdopodobieństwa subiektywnego). Ocena typu B może być zastosowana w każdej sytuacji.

4. Inne miary niepewności. Niepewność maksymalna

Przyjęta przez *Przewodnik* ogólna definicja niepewności jako parametru charakteryzującego rozrzut wyników pomiaru nie wyklucza, że rozrzut ten określać mogą też inne parametry. Niemniej w dokumencie tym inne możliwe miary rozrzutu nie są wymienione nawet z nazwy.
W wielu sytuacjach używana jest miara niepewności, której nazwą uznaną przez literaturę jest **błąd graniczny** – **zaleca się używać: niepewność graniczna**. (Alternatywną nazwą spotykaną w podręcznikach jest **błąd maksymalny** – jednak nie jest polecana**)**. Niepewność graniczna Δx jest miarą deterministyczną, twierdzimy mianowicie, że można określić przedział

$$x_0 - \Delta x < x_i < x_0 + \Delta x,$$

w którym mieszczą się *wszystkie* wyniki pomiaru x_i, aktualnie wykonane i przyszłe. Z powyższej nierówności wynika, że wartość rzeczywista x_0 zawarta jest *na pewno* w przedziale $x_i \pm \Delta x$ wokół dowolnego wyniku pomiaru x_i.

5. Niepewności pomiarów bezpośrednich

5.1. Metoda typu A obliczania niepewności standardowej

Ocena typu A opiera się na analizie statystycznej serii wyników pomiarów. Wykonywanie n pomiarów bezpośrednich jest odpowiednikiem losowania n - elementowej próbki $\{x_1, x_2, x_3, ..., x_n\}$ z nieskończenie licznej populacji, którą stanowią wszystkie możliwe do wykonania pomiary. Za **wynik pomiaru** przyjmuje się **średnią arytmetyczną** n wyników pomiarów

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i . \tag{1}$$

Niepewnością standardową wyniku pomiaru wielkości X nazywamy odchylenie standardowe eksperymentalne średniej arytmetycznej $\bar{x}$, które oblicza się ze wzoru

$$u(x) = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} . \tag{2}$$

UWAGA! Chociaż niepewność ta odnosi się do $\bar{x}$ jej symbolem jest $u(x)$ a nie $u(\bar{x})$.

Ocenami typu A są wszelkie inne metody określania niepewności przy użyciu metod statystycznych, np. niepewności parametrów dopasowania prostej regresji do punktów eksperymentalnych.

5.2. Metoda typu B obliczania niepewności standardowej

Niepewność standardową szacuje się metodą typu B w przypadku, gdy dostępny jest tylko jeden wynik pomiaru, albo gdy wyniki nie wykazują rozrzutu. Wówczas niepewność standardową ocenia się na podstawie wiedzy o danej wielkości lub o przedziale, w którym wartość rzeczywista powinna się mieścić.

5.2.1. Niepewność wzorcowania

W przypadku wyników nie wykazujących rozrzutu głównym przyczynkiem niepewności pomiarów jest **niepewność wzorcowania (niepewność maksymalna)** $\Delta_d x$.

Producenci przyrządów takich jak przymiar milimetrowy, suwmiarka czy termometr lekarski na ogół nie określają ich dokładności. Powszechnie uważa się, że niesprecyzowana bliżej „dokładność” (niepewność wzorcowania $\Delta_d x$) jest równa wartości najmniejszej działki skali, zwanej *działką elementarną*. Jej wartość wynosi dla linijki 1 mm, suwmiarki 0,05 mm, śruby mikrometrycznej 0,01 mm, termometru lekarskiego 0,1 °C. Ocena ta może być skorygowana w górę lub w dół zgodnie z posiadaną wiedzą i doświadczeniem. Na przykład, jeżeli mierzymy linijką średnicę monety jednogroszowej i oceniamy „na oko” również dziesiąte części milimetra, to niepewność wzorcowania $\Delta_d x$ może zmniejszyć się do 0,2 mm. Z drugiej strony, przy pomiarze rozmiarów pokoju taśmą mierniczą, niepewność wzorcowania należy przyjąć większą niż 1 mm, choć skalę z podziałką milimetrową mamy na całej pięciometrowej taśmie.

Przyjmuje się, że wartość $\Delta_d x$ jest równa połowie szerokości rozkładu jednostajnego, a niepewność standardowa wynosi

$$u(x) = \frac{\Delta_d x}{\sqrt{3}} . \tag{3}$$

(Jest to odchylenie standardowe eksperymentalne w rozkładzie jednostajnym).

W wyniku rewolucji w miernictwie wynikającej z postępów elektroniki prawie wszystkie używane współcześnie przyrządy pomiarowe to albo proste przyrządy ze skalą analogową, albo też elektroniczne mierniki cyfrowe. Dla każdego z typów tych przyrządów określenie niepewności wzorcowania (niepewności maksymalnej) przebiega nieco inaczej.

Niepewność wzorcowania przyrządów analogowych

W przyrządzie analogowym jego „dokładność" precyzuje tzw. klasa przyrządu, która wyraża w procentach stosunek niepewności maksymalnej Δx do pełnego wychylenia miernika na danym zakresie pomiarowym. Jej sens jest taki, że wyniki prawidłowo wykonanych pomiarów nie różnią się od wartości rzeczywistej x_0 więcej niż o $\pm\Delta x$. I tak by było, gdyby obserwator odczytywał absolutnie dokładnie położenie wskazówki na skali przyrządu. Odczyt dokonywany jest z pewną dokładnością (do działki skali, do 1/2 działki skali, itd.), dlatego też niepewność wzorcowania (niepewność maksymalna) przyrządu analogowego jest sumą niepewności wynikającej z klasy i z odczytu, a niepewność standardową obliczamy ze wzoru

$$u(x) = \frac{[(klasa \times zakres/100) + \Delta x_{\text{odczytu}})]}{\sqrt{3}}. \tag{4}$$

Niepewność wzorcowania przyrządów cyfrowych

Inaczej odbywa się określanie niepewności wzorcowania (niepewność graniczna) dla przyrządów z cyfrowym wyświetlaniem wyników pomiarów. W tego typu przyrządach nie występuje niepewność związana z odczytem wielkości mierzonej. Zmianę wartości mierzonej odpowiadającą przeskokowi ostatniej cyfry nazwać można *działką elementarną* danego przyrządu. Ważne jest, by działki elementarnej nie utożsamiać z niepewnością pomiaru przyrządu z cyfrowym wyświetlaczem.

W celu określenia niepewności wzorcowania musimy zajrzeć do instrukcji przyrządu. Znajdziemy tam informację o wartości niepewności wzorcowania, najczęściej podaną jako kombinacja liniowa wartości mierzonej i zakresu

$$\Delta_d x = C_1 \cdot \textit{wartość mierzona} + C_2 \cdot \textit{zakres pomiarowy}. \tag{5}$$

Przykład z instrukcji miernika uniwersalnego. Napięcie DC: 200 mV / 2 V / 20 V / 200 V; ±(0,5%+2) („+2" oznacza, że należy powiększyć o 2 jednostki na ostatnim miejscu cyfry znaczącej). Jeśli wskazanie na zakresie 20 V wynosi 8,5 to dla 0,5 % mamy 0,0425. Dla 2 cyfr na ostatnim miejscu znaczącym daje to 0,2. Zatem niepewność graniczna pojedynczego pomiaru wynosi: 0,3 (z zaokraglenia wgórę liczby 0,2425).

Uzyskaną w ten sposób niepewność graniczną zamieniamy na niepewność standardową przy użycie wzoru $u(x) = \frac{\Delta_d x}{\sqrt{3}}$

5.2.2. Niepewność eksperymentatora

Drugim przyczynkiem niepewności pomiarów nie wykazujących rozrzutu jest **niepewność eksperymentatora (niepewność maksymalna)** $\Delta_e x$, spowodowana przyczynami znanymi eksperymentatorowi, ale od niego niezależnymi. Eksperymentator korzysta ze swego doświadczenia i wiedzy w celu określenia niepewności $\Delta_e x$ oraz wynikającej stąd niepewności standardowej. Niepewność standardową eksperymentatora można oszacować na podstawie rozkładu jednostajnego; wtedy $u(x) = \frac{\Delta_e x}{\sqrt{3}}$.

5.2.3. Niepewność tablicowa

Niepewnościami obarczone są również wyniki zaczerpnięte z literatury, tablic matematycznych lub kalkulatora. Jeśli nie jest podana wartość odchylenia standardowego eksperymentalnego (jeśli jest podana, wtedy niepewność $u(x)$ jest równa temu odchyleniu) i brak jest jakiejkolwiek informacji o niepewności, przyjmujemy, że **niepewność tablicowa (niepewność maksymalna)** $\Delta_t x$ jest równa 10 jednostkom ostatniego miejsca dziesiętnego. Niepewność standardowa jest szacowana na podstawie rozkładu jednostajnego; $u(x) = \frac{\Delta_t x}{\sqrt{3}}$.

5.2.4 Całkowita niepewność standardowa

Najczęściej przyczynki od niepewności wzorcowania i niepewności eksperymentatora występują jednocześnie i wtedy niepewność standardowa szacowana metodą B powinna być obliczona ze wzoru

$$u(x) = \sqrt{\frac{(\Delta_{\mathrm{d}} x)^2}{3} + \frac{(\Delta_{\mathrm{e}} x)^2}{3}} \,. \tag{6}$$

Jeśli natomiast obydwa typy niepewności, A i B, występują równocześnie, to należy posłużyć się następującym wzorem na niepewność standardową (całkowitą):

$$u(x) = \sqrt{u_{\mathrm{A}}^2(x) + u_{\mathrm{B}}^2(x)} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2 + \frac{(\Delta_{\mathrm{d}} x)^2}{3} + \frac{(\Delta_{\mathrm{e}} x)^2}{3}}. \tag{7}$$

6. Pomiar pośredni. Prawo przenoszenia niepewności

W większości pomiarów fizycznych szukana wielkość nie daje się zmierzyć bezpośrednio. Jest ona wyznaczana z zależności funkcyjnej

$$y = f(x_1, x_2, x_3, ..., x_k, ..., x_K), \tag{8}$$

gdzie $x_1, x_2, x_3, ..., x_k, ..., x_K$ oznacza K wielkości mierzonych bezpośrednio. Zakłada się, że znane są wyniki pomiarów (średnie arytmetyczne) tych wielkości $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3, \ldots \overline{x}_k, \ldots \overline{x}_K$ oraz ich niepewności standardowe $u(x_1), u(x_2,), u(x_3), ..., u(x_k), ..., u(x_K)$. Wynik (końcowy) pomiaru wielkości złożonej oblicza się ze wzoru

$$\overline{y} \cong f(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3, \ldots, \overline{x}_k, \ldots, \overline{x}_K). \tag{9}$$

Przy obliczaniu niepewności standardowej wielkości złożonej należy rozróżnić nieskorelowane i skorelowane pomiary wielkości mierzonych bezpośrednio x_k.

6.1 Wielkość złożona – pomiary bezpośrednie nieskorelowane

W pomiarach nieskorelowanych (chodzi tu o korelację między wielkościami mierzonymi, której miarą są współczynniki korelacji) każdą wielkość mierzy się w innym, niezależnym doświadczeniu.

Złożoną niepewność standardową $u(y)$ wielkości obliczanej pośrednio y oblicza się korzystając z **prawa przenoszenia niepewności** pomiarów bezpośrednich nieskorelowanych w postaci

$$u(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 u^2(x_i)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \left[c_i \, u(x_i)\right]^2} \equiv \sqrt{\sum_{i=1}^{N} u_i^2(y)} \tag{10}$$

gdzie n – liczba wielkości mierzonych bezpośrednio, c_i – współczynnik wrażliwości, $u_i(y) \equiv c_i \, u(x_i)$ – udziały niepewności.

Możemy korzystać z prawa propagacji niepewności względnych w postaci

$$u_{\mathrm{c,r}} = \frac{u(y)}{|y|} = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \left[p_i \, u_{\mathrm{r}}(x_i)\right]^2} \qquad \left(= \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \left[\left(\frac{c_i \, x_i}{y}\right) \frac{u(x_i)}{x_i}\right]^2} \right), \tag{11}$$

gdzie $p_i = c_i \, x_i / y$ – względny współczynnik wrażliwości; $u_{\mathrm{r}}(x_i) = u(x_i)/|x_i|$ – względna niepewnośc pomiaru wielkości x_i.

Uwaga: W konwencji GUM nie ma oddzielnego oznaczenia dla niepewności względnej. Tutaj przyjęliśmy oznaczenie u z indeksem „r” (z ang. relative – względny).

Złożoną niepewność standardową $u_c(y)$ można obliczyć ze wzoru numerycznego wskazanego w *Przewodniku GUM*:

$$u_i(y) = \frac{1}{2}\left[f(x_1,\ldots,x_i + u(x_i),\ldots,x_N) - f(x_1,\ldots,x_i - u(x_i),\ldots,x_N)\right]. \tag{12}$$

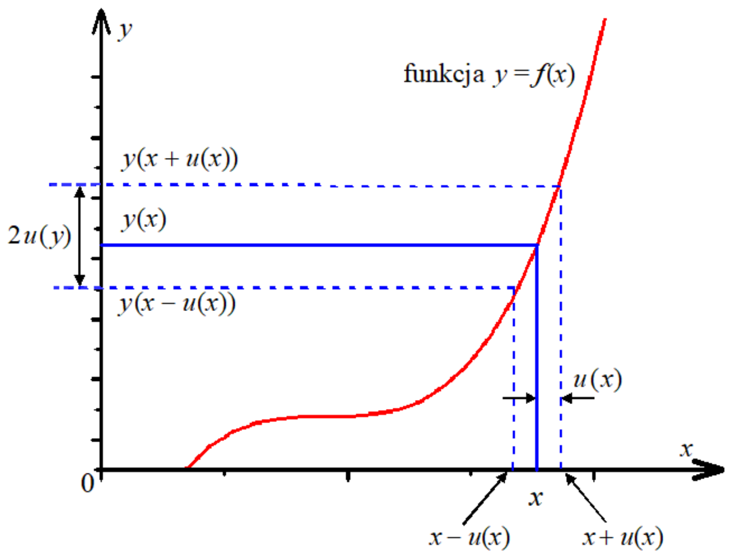
Wówczas

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^{N} u_i^2. \tag{13}$$

– obliczanie niepewności wielkości mierzonej pośrednio $u(y)$; dla dowolnej zależności jednej zmiennej $y = f(x)$ z wykorzystaniem wzoru[1]:

$$u(y) = \frac{1}{2}\left| f(x+u(x)) - f(x-u(x))\right|$$

Wzór ten można zilustrować graficznie:



– zamienianie niepewności granicznej Δx na niepewność standardową $u(x)$ z zastosowaniem związku podanego w punkcie 2. w sytuacji, gdy wielkość x (w powyższym wzorze) jest obarczona niepewnością graniczną;

Przykład – gęstość, walec

Z definicji, dla ciała w kształcie walca o średnicy D, wyskości h i masie m

$$\rho = \frac{m}{V} = m\left(\frac{\pi}{4}D^2 h\right)^{-1} = \frac{4}{\pi} m^1 h^{-1} D^{-2}. \tag{14}$$

Z (12) i (13) mamy

$$u_m(\rho) = \frac{1}{2}\left(\frac{m+u(m)}{V} - \frac{m-u(m)}{V}\right) = \frac{1}{2}\frac{2u(m)}{V} = \frac{u(m)}{V} = \frac{m}{V}\frac{u(m)}{m} = \rho\frac{u(m)}{m}$$

[1] Wzór zalecany przez *Przewodnik GUM*, zob. pkt 5.1.3. Wskazuje elementarny sposób obliczania niepewności na podstawie skończonych różnic oraz pozwala wyprowadzić gotowe wyrażenia analityczne w przypadkach szczególnych sumy, iloczynu i ilorazu. Więcej w artykule: A. Zięba, *Prawo propagacji niepewności bez pochodnych. Foton* 139, Zima 2017, str. 15-22. Wykres oprac. na podstawie rys. z tego artykułu.

$$u_h(\rho)=\frac{1}{2}\left(\frac{m}{V}\frac{h}{(h+u(h))}-\frac{m}{V}\frac{h}{(h-u(h))}\right)=\frac{1}{2}\frac{m}{V}\left(\frac{h}{h+u(h)}-\frac{h}{h-u(h)}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\frac{mh}{V}\cdot\frac{(h-u(h))-(h+u(h))}{(h+u(h))(h-u(h))}=\frac{1}{2}\rho h\frac{-2u(h)}{h^2-(u(h))^2}$$
$$\approx-\rho\frac{u(h)}{h}$$

Podobnie obliczając otrzymamy

$$u_D(\rho)\approx-\rho\frac{2u(D)}{D}.$$

Zatem

$$u^2(\rho)=|u_m(\rho)|^2+|u_h(\rho)|^2+|u_D(\rho)|^2=\bar{\rho}^2\left[\left(\frac{u(m)}{\bar{m}}\right)^2+\left(-\frac{u(h)}{\bar{h}}\right)^2+\left(-2\frac{u(D)}{\bar{D}}\right)^2\right] \quad (15)$$

gdzie $\bar{\rho}$, $\bar{m}$, $\bar{h}$, $\bar{D}$ – wartości średnie.

Niepewność względną możemy obliczyć jako

$$\frac{u_c(\rho)}{\bar{\rho}}=\sqrt{\left(\frac{u(m)}{\bar{m}}\right)^2+\left(\frac{u(h)}{\bar{h}}\right)^2+\left(2\frac{u(D)}{\bar{D}}\right)^2}. \quad (16)$$

Wzór (15) możemy stosunkowo szybko wyprowadzić korzystając z różniczki fukcji logarytmicznej. W tym celu obliczamy $\ln\rho$ i jej różniczkę ($\mathrm{d}(\ln\rho)=\mathrm{d}\rho/\rho$). Dla gęstości walca (14) mamy:

$$\ln\rho=\ln(4\pi^{-1})+\ln m-\ln h-2\ln D. \quad (17)$$

Zatem

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho}=\frac{\mathrm{d}m}{m}+\left(-\frac{\mathrm{d}h}{h}\right)+\left(-2\frac{\mathrm{d}D}{D}\right). \quad (18)$$

Z porównania (18) możemy podać względne współczynniki wrażliwości p_i (zauważmy, że $p_i=\alpha_i$) we wzorze (6) na niepewność standardową względną i dla $u_c(y)$ możemy napisać

$$u_{c,w}(\rho_w)=\bar{\rho}_w\sqrt{\left(\frac{u(m)}{\bar{m}}\right)^2+\left(-\frac{u(h)}{\bar{h}}\right)^2+\left(-2\frac{u(D)}{\bar{D}}\right)^2}\quad. \quad (9)$$

Powyższe możemy uogólnić dla dowolnej funkcji postaci

$$y=c\,x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\ldots x_n^{\alpha_n},$$

wówczas

$$\frac{u_c(y)}{y}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left[\alpha_i\frac{u(x_i)}{x_i}\right]^2}.$$

6.2 Wielkość złożona – pomiary bezpośrednie skorelowane

Pomiary należy uznać za **skorelowane** zawsze wtedy, gdy dane wielkości są mierzone bezpośrednio za pomocą jednego zestawu doświadczalnego, w jednym doświadczeniu. W praktyce oznacza to, że wszystkie pomiary elektryczne wykonywane w laboratoriach studenckich są pomiarami skorelowanymi. Z uwagi na bardzo skomplikowane obliczanie złożonej niepewności standardowej wielkości mierzonej pośrednio o skorelowanych wielkościach wejściowych (mierzonych bezpośrednio) **w pracowniach studenckich** wygodniej jest postępować następująco.

Wyniki y_i oblicza się korzystając z kompletu wyników pomiarów bezpośrednich K wielkości $x_{k,i}$ uzyskanych w i pomiarze $y_i = f(x_{1,i}, x_{2,i}, x_{3,i}, ..., x_{k,i},..., x_{K,i})$. Seria wyników y_i, uzyskanych w n pomiarach, stanowi próbkę losową podobnie jak w pomiarach bezpośrednich. Przyjmuje się, że wynikiem pomiaru pośredniego jest

$$\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i \tag{11}$$

a złożoną niepewność standardową wyniku określa wzór

$$u_c(y) = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2} \tag{12}$$

6.3 Prawo przenoszenia niepewności maksymalnej

W przypadku rachunku niepewności opartego na pojęciu niepewności maksymalnej przyczynki pochodzące od poszczególnych zmiennych wejściowych obliczamy tak samo, ale zamiast sumy geometrycznej obliczamy sumę algebraiczną ich wartości bezwzględnych,

$$\Delta y = \sum_{k=1}^{K} \left| \frac{\partial f}{\partial x_k} \Delta x_k \right| \tag{13}$$

Postępowanie takie nazywane było dawniej metodą różniczki zupełnej. Analogiczne obliczenie dla względnej niepewności maksymalnej nosiło nazwę metody pochodnej logarytmicznej. Sposobu tego jednak nie stosujemy.

7. Niepewność rozszerzona i zapisywanie wyników

Dla celów komercyjnych, przemysłowych, zdrowia i bezpieczeństwa zachodzi konieczność podania miary niepewności, która określa przedział otaczający wynik pomiaru zawierający dużą, z góry określoną, część wyników, jakie można przypisać wielkości mierzonej. Niepewność spełniającą powyższy warunek nazywa się **niepewnością rozszerzoną** i oznacza symbolem $U(y)$ lub U. Definiuje się ją wzorem $U(y) = ku_c(y)$, gdzie k nazywa się **współczynnikiem rozszerzenia**. Jest to umownie przyjęta liczba, wybrana tak, by w przedziale $y \pm U(y)$ znalazła się większość wyników pomiaru potrzebna do danych zastosowań, na przykład na I Pracowni do wnioskowania o zgodności z wartością tabelaryczną. W Przewodniku stwierdza się, że wartość k wynosi najczęściej $2 \div 3$.

Przewodnik przyjmuje zasadę zapisywania niepewności z dokładnością do **dwu cyfr znaczących**.

Spośród dwu sposobów skrótowego zapisu wartości mierzonej i jej niepewności (patrz Tabela), utrwala się zasada, by zapis z użyciem symbolu "±" stosować wyłącznie do niepewności rozszerzonej, natomiast zapis z użyciem nawiasów do niepewności standardowej.

Przykłady zapisu.

Niepewność standardowa: m = 100,021 4 g, $u(m)$ = 3,5 mg lub m = 100,021 4(35) g

lub m = 100,021 4(0,003 5) g

Niepewność rozszerzona: m = 100,021 4 g, $U(m)$ = 0,007 0 g lub m = (100,021 4 ± 0,007 0) g

Uwaga: Zgodnie z zaleceniem dot. zapisu liczb grupujemy je po 3 (tysiące i tysięczne) oddzielone półpauzą (spacją).

Najważniejsze elementy
Międzynarodowej konwencji GUM Oceny Niepewności Pomiaru

Wielkość	Symbol i sposób obliczania
Niepewność standardowa: ocena typu A	Statystyczna analiza serii pomiarów, w tym: $u(x)$ dla serii n równoważnych pomiarów $u(x)=\sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}$, $u(a)$, $u(b)$ dla parametrów prostej regresji, itp.
Niepewność standardowa: ocena typu B	Naukowy osąd eksperymentatora, $u(x)=\frac{\Delta x}{\sqrt{3}}$ (gdy znana jest niepewność Δx – wzorcowania $\Delta_d x$, eksperymentatora $\Delta_e x$, odczytu z tablic czy kalkulatora $\Delta_t x$)
Złożona niepewność standardowa	$u_c(y)=\sqrt{\sum_{k=1}^{K}\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right)^2 u^2(x_k)}$ (dla nieskorelowanych x_k), K – liczba wielkości mierzonych bezpośrednio
Współczynnik rozszerzenia	$2 \le k \le 3$
Niepewność rozszerzona	$U(y) = k u_c(y)$
Zalecany zapis niepewności	standardowa g = 9,781 m/s^2, $u_c(g)$ = 0,076 m/s^2 g = 9,781(76) m/s^2 rozszerzona g = 9,78 m/s^2, U(g) = 0,15 m/s^2 g =(9,78 ± 0,15) m/s^2 (zasada podawania 2 cyfr znaczących niepewności)

Literatura

1. *Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement*, ISO, Switzerland 1995.
   The NIST Reference on Constants, Units, and Uncertainty, http://physics.nist.gov/cuu/Uncertainty/index.html
2. *Wyrażanie niepewności pomiaru: Przewodnik*, Główny Urząd Miar, Warszawa 1999.
3. A. Zięba, *Analiza danych w naukach ścisłych i technicznych.* PWN, Warszawa, 2014.
4. A. Zięba, *Postępy Fizyki*, 52 Z. 5, 238 (2001).
5. H. Szydłowski, *Postępy Fizyki*, 51 Z. 2, 92 (2000).
6. H. Szydłowski, *Niepewności w pomiarach. Międzynarodowe standardy w praktyce*. Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań 2001.
7. R. Janiczek, Metody oceny niepewności pomiarów. Wyd. Prac. Komputerowej Jacka Skalmierskiego. Katowice-Gliwice 2008.