	Temat: **_Wyznaczanie gęstości substancji dla kuli, prostopadłościanu i walca_**		Nr ćwiczenia
			1
Imię i nazwisko:	Rok, kierunek:	Specjalność:	Data wykonania pomiarów:
	I rok,		

Zajęcia laboratoryjne: Statystyka i analiza danych pomiarowych.

I. Wprowadzenie do doświadczenia

1. *Cel doświadczenia, przyrządy*

Celem doświadczenie jest …. (wpisać).

Przyrządy: waga elektroniczna z rozdzielczością, suwmiarka cyfrowa i analogowa, próbki substancji w kształcie prostopadłościanu i walca.

2. *Wprowadzenie teoretyczne*

(Wzór dla wielkości pomiarowej/ych. Rysunek, schemat układu – jeśli wynika to z charakteru doświadczenia.)

Gęstość substancji z której jest wykonana jest bryła (kula, prostopadłościan, walec) wyznaczamy ze wzoru

$$\rho = \frac{m}{V}, \tag{1}$$

gdzie

m – masa bryły (kuli, prostopadłościanu, walca); V – objętość bryły przy czym:

objętość: kuli – $V_k = \frac{\pi}{6} D_k^3$, walca – $V_w = \frac{\pi}{4} D_w^2 h$, prostopadłościanu – $V_p = abc$,

D_k – średnica kuli, D_w – średnica walca; h – wysokość walca, a, b, c – wymiary prostopadłościanu.

Do obliczeń wartości średnich pomiarów bezpośrednich zastosowany będzie wzór na *średnią arytmetyczną* n wyników pomiarów:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i, \tag{2}$$

gdzie n – liczba pomiarów a x oznacza wielkość mierzoną.

3. *Niepewności pomiaru*

Pomiary bezpośrednie

Do obliczeń niepewności pomiarów bezpośrednich zastosowane będą następujące wzory:
odchylenie standardowe wartości średniej

$$u_A(x) = s_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} \tag{3}$$

całkowita niepewność standardowa pomiaru bezpośredniego

$$u(x) = \sqrt{u_A^2(x) + u_B^2(x)} = \sqrt{s_{\bar{x}}^2 + \frac{(\Delta_d x)^2 + (\Delta_e x)^2}{3}} \tag{4}$$

gdzie

$\Delta_d x$ – niepewność (działki przyrządu) wzorcowania danego przyrządu

$\Delta_e x$ – niepewność eksperymentatora

We wzorach x oznacza wielkość mierzoną bezpośrednio – m, a, b, c, h lub D.

Pomiary pośrednie

Złożoną niepewność standardową $u_c(y)$ wielkości liczonej pośrednio y oblicza się korzystając z prawa przenoszenia niepewności pomiarów bezpośrednich nieskorelowanych w postaci

$$u_c(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 u^2(x_i)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{N}\left[c_i\, u(x_i)\right]^2} \equiv \sqrt{\sum_{i=1}^{N} u_i^2(y)}\ , \tag{5}$$

gdzie N – liczba wielkości mierzonych bezpośrednio, c_i – współczynnik wrażliwości, $u_i(y) \equiv |c_i|\, u(x_i)$ – udziały niepewności.

Wygodnie jest korzystać z prawa propagacji niepewności względnych[1]

$$u_{c,r} = \frac{u_c(y)}{|y|} = \sqrt{\sum_{i=1}^{N}\left[p_i\, u_r(x_i)\right]^2} \qquad \left(= \sqrt{\sum_{i=1}^{N}\left[\left(\frac{c_i\, x_i}{y}\right)\frac{u(x_i)}{x_i}\right]^2}\right), \tag{6}$$

gdzie p_i – względny współczynnik wrażliwości; $p_i = c_i\, x_i / y$.

Zaletą prawa przenoszenia niepewności względnych jest nie tylko ułatwienie obliczeń, lecz także bardziej przejrzysta analiza przyczyn niepewności. Obliczając niepewności względne wielkości wejściowych, widzimy, która z nich jest największa – z reguły to ona wnosi największy udział do niepewności złożonej.

W naszym przypadku $y \equiv \rho$ a zależność funkcyjną f określają wzory na ρ. Ponieważ mają postać jednomianu ($y = k\, x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$, k – stała) więc wygodnie jest obliczyć niepewność względną wg następującego schematu: obliczamy logarytm funkcji a następnie różniczkę logarytmu tej funkcji. Ponieważ $\ln y = \ln k + \alpha_1 \ln x_1 + \alpha_2 \ln x_2 + \dots + \alpha_n \ln x_n$, więc

$$\mathrm{d}(\ln y) = \frac{\mathrm{d}y}{y} = \alpha_1 \frac{\mathrm{d}x_1}{x_1} + \alpha_2 \frac{\mathrm{d}x_2}{x_2} + \dots + \alpha_n \frac{\mathrm{d}x_n}{x_n}$$

Z porównania ze wzorem (6) i przyporządkowania $\mathrm{d}x_i \rightarrow u(x_i)$ oraz $\alpha_i \rightarrow p_i$ możemy zapisać postać wzoru na względną niepewność pomiaru wielkości y mierzonej pośrednio.

Dla gęstości walca mamy:

$$\rho = m\left(\frac{\pi}{4} D^2 h\right)^{-1} = \frac{4}{\pi} m^1 h^{-1} D^{-2}, \quad \text{więc} \quad \ln\rho = \ln(4\pi^{-1}) + \ln m - \ln h - 2\ln D\ . \tag{7}$$

Zatem

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho} = \frac{\mathrm{d}m}{m} + \left(-\frac{\mathrm{d}h}{h}\right) + \left(-2\frac{\mathrm{d}D}{D}\right). \tag{8}$$

Z porównania z (8) możemy podać względne współczynniki wrażliwości p_i (zauważmy, że $p_i = \alpha_i$) we wzorze (6) na niepewność standardową względną i dla $u_c(y)$ możemy napisać

$$u_{c,w}(\rho_w) = \bar{\rho}_w \sqrt{\left(\frac{u(m)}{\bar{m}}\right)^2 + \left(-\frac{u(h)}{\bar{h}}\right)^2 + \left(-2\frac{u(D)}{\bar{D}}\right)^2}\ . \tag{9}$$

Podobnie postępując dla gęstości kuli i prostopadłościanu otrzymamy

$$u_{c,k}(\rho_k) = \rho_k \sqrt{\left(\frac{u(m)}{\bar{m}}\right)^2 + \left(3\frac{u(D)}{\bar{D}}\right)^2}\ . \tag{10}$$

[1] Niepewność względna w *Przewodniku GUM* nie ma oddzielnego oznaczenia. W sytuacjach nie powodujących nieporozumień będziemy stosować zapis z indeksem dolnym „r” tj. $u_r(y) \equiv u(y)/y$.

$$u_{\mathrm{c,\,p}}(\rho_{\mathrm{p}}) = \bar{\rho}_{\mathrm{p}} \sqrt{\left(\frac{u(m)}{\bar{m}}\right)^2 + \left(\frac{u(a)}{\bar{a}}\right)^2 + \left(\frac{u(b)}{\bar{b}}\right)^2 + \left(\frac{u(c)}{\bar{c}}\right)^2}\,. \tag{11}$$

Zauważmy, że znając współczynniki p_i możemy z (7) obliczyć udziały niepewności $c_i\, u(x_i)$

$$u_i(\rho) = |c_i|\, u(x_i) = |p_i|\, u_{\mathrm{r}}(x_i)\, \rho. \tag{12}$$

Porównując z (9) widzimy, że dla trzeciej mierzonej bezpośrednio wielkości – D, dla której $i = 3$, mamy $p_i = -2$ i jej udział niepewności jest równy

$$u_D(\rho) = |-2|\; u_{\mathrm{r}}(D)\rho = \left|-2\frac{\rho}{D}\right| u(D) = \left|-2\frac{4}{\pi}\frac{m}{hD^2}\right| u(D),$$

Stąd, współczynnik wrażliwości $c_D = |-8\rho/\mathrm{D}|\, u(D) = |-8m/(\pi h D^2)|$.

Obliczone wartości są potrzebne do zestawienia tzw. **bilansu niepewności pomiaru** co stanowi przyjętą formę raportowania w dokumentacjach.

Złożoną niepewność standardową $u_{\mathrm{c}}(y)$ można obliczyć bez odwoływania się do pochodnych. W tym celu skorzystamy z zalecanego przez *Przewodnik GUM* wzoru:

$$Z_i = \frac{1}{2}\left[f\left(x_1,\ldots,x_i + u(x_i),\ldots,x_N\right) - f\left(x_1,\ldots,x_i - u(x_i),\ldots,x_N\right)\right]. \tag{Z1}$$

To znaczy, że wartość $u_i(y)$ ($\equiv c_i\, u(x_i)$ – udziały niepewności) wyznacza się obliczając zmianę spowodowaną zmianą x_i o $+u(x_i)$ i o $-u(x_i)$. Jako wartość $u_i(y)$ przyjmuje się $|Z_i|$, a jako wartość odpowiedniego współczynnika wrażliwości c_i przyjmuje się $Z_i/u(x_i)$. Oczywiście

$$u_{\mathrm{c}}^2(y) = \sum_{i=1}^{N} Z_i^2. \tag{Z2}$$

Zauważmy, że wzór (Z2) odpowiada wzorowi (5).

Korzystając z wzorów (Z1) i (Z2) obliczymy niepewność pomiaru dla gęstości walca

$$Z_m = \frac{1}{2}\left(\frac{m + u(m)}{V} - \frac{m - u(m)}{V}\right) = \frac{1}{2}\frac{2u(m)}{V} = \frac{u(m)}{V} = \frac{m}{V}\frac{u(m)}{m} \quad = \rho\frac{u(m)}{m}$$

$$\begin{aligned} Z_h &= \frac{1}{2}\left(\frac{m}{V}\frac{h}{(h + u(h))} - \frac{m}{V}\frac{h}{(h - u(h))}\right) \quad = \quad \frac{1}{2}\frac{m}{V}\left(\frac{h}{h + u(h)} - \frac{h}{h - u(h)}\right) \\ &= \frac{1}{2}\frac{mh}{V}\cdot\frac{\left(h - u(h)\right) - \left(h + u(h)\right)}{\left(h + u(h)\right)\left(h - u(h)\right)} \quad = \quad \frac{1}{2}\rho h\frac{-2u(h)}{h^2 - \left(u(h)\right)^2} \quad \approx -\rho\frac{u(h)}{h} \end{aligned}$$

Podobnie obliczając otrzymamy

$$Z_D \approx -\rho\frac{2u(D)}{D}.$$

Zatem podstawiając do (Z2) mamy

$$u_{\mathrm{c}}^2(\rho) = |Z_m|^2 + |Z_h|^2 + |Z_D|^2 = \rho^2\left[\left(\frac{u(m)}{m}\right)^2 + \left(-\frac{u(h)}{h}\right)^2 + \left(-2\frac{u(D)}{D}\right)^2\right],$$

czyli dokładnie to samo co w (9).

Podobnie postępując obliczamy niepewności pomiru gęstości dla kuli i prostopadłoscianu.

II. Pomiary

Podać niepewności pomiaru typu B (systematyczne) wynikające z użycia suwmiarki i wagi.

$\Delta_d a$ = …., $u_d(a)$ = …., itd.; $\Delta_d m$ = …., $u_d(m)$ = …. .

Wypisać dane pomiaru w postaci Tabeli.

III. Opracowanie wyników

Najpierw wyznacza się wartości z pomiaru bezpośredniego oraz ich niepewności pomiaru (wartości wpisać lub wkleić z arkusza kalkulacyjnego).
Następnie oblicza się wartości z pomiaru pośredniego oraz ich niepewności pomiaru (wartości wpisać lub wkleić z arkusza kalkulacyjnego).

Zapisać po zaokrągleniu wartość gęstości i jej niepewności oraz niepewność względną.

Zapisać również niepewności pomiaru otrzymane z obliczeń dla metody NKP, metody elementarnej.

Ocena zgodności wyników

Porównać wyniki korzystając z suwmiarki cyfrowej i analogowej. Odnieść się do danych tablicowych.

IV. Zestawienie wyników danych pomiarów bezpośrednich i pośrednich

Przedstawić zestawienie w postaci tabeli (oddzielnie dla prostopadłościanu i walca)

Tabela …. . – patrz ostatnia strona

V. Dyskusja wyników

Uzyskana w doświadczeniu wartość gęstości prostopadłościanu (…)

VI. Wnioski

Najlepiej w punktach. Porównać niepewności otrzymane różnymi metodami: z prawa propagacji niepewności, metoda elementarna, metoda NKP (dane przedstawić w postaci tabeli).

Dopisek – porównywanie wyników

Chcąc porównać otrzymane wyniki z wynikiem tablicowym x^{T}, korzystamy z przedziałowego ***kryterium zgodności wyników pomiarów***, czyli sprawdzamy czy dla naszych wyników spełniona jest nierówność:

$$\left|\bar{x} - x^{\mathrm{T}}\right| \leq u(\bar{x}) + u(x^{\mathrm{T}})\,. \tag{12}$$

Jeżeli powyższa nierówność nie zachodzi, należy zastąpić niepewność u przez *niepewność rozszerzoną U*. Jeśli i wówczas ta nierówność nie jest spełniona to znaczy, że wyniki nie są zgodne.

Niepewność rozszerzona (*expanded uncertainty*) – zdefiniowana przez „wielkość określającą przedział wokół wyniku pomiaru, taki że można oczekiwać, iż obejmie on dużą część wartości, które w uzasadniony sposób można przyporządkować wielkości mierzonej."

Obie niepewności są powiązane zależnością $U = ku$, gdzie k – współczynnik rozszerzenia. Współczynnik rozszerzenia k zależny jest od liczby pomiarów oraz poziomu ufności (określany jest często mianem *współczynnika Studenta-Fishera* $t_{n,\alpha}$), w większości przypadków przyjmujemy $k = 2$.

Nierówność (12) możemy stosować dla wartości otrzymanych różnymi metodami pomiarów, wówczas sprawdzamy czy spełniona jest nierówność:

$$\left|\bar{x} - \bar{x}'\right| \leq u(\bar{x}) + u(\bar{x}')\,. \tag{13}$$

Jeżeli powyższa nierówność nie zachodzi, postępujemy jak zostało opisane powyżej.

Tabela 1. Bilans niepewności wyznaczenia gęstości dla walca. Pomiar suwmiarką: cyfrową – a), analogową – b).

Rodzaj pomiaru	Symbol i jednostka wielkości mierzonej	Wartość średnia	Niepewność pomiaru $u(x_i)$	Względna niepewność pomiaru $u_r(x_i)$, %	Względny wsp. wrażliwości p_i, %	Udział niepewności względnej $c_i\, u_r(x_i)$, %	Udział niepewności $c_i\, u(x_i)$
Pomiar bezpośredni	m, g						
	a) h, cm						
	b) h, cm						
	a) D, cm						
	b) D, cm						
Pomiar pośredni	a) ρ, kg/m^3						
	b) ρ, kg/m^3						
Wynik oczekiwany	ρ^{T}, kg/m^3						
Ocena zgodności wyników							

T – dane tablicowe.

Tabela 2. Bilans niepewności wyznaczenia gęstości dla prostopadłościanu. Pomiar suwmiarką: cyfrową – a), analogową – b).

Rodzaj pomiaru	Symbol i jednostka wielkości mierzonej	Wartość średnia	Niepewność pomiaru $u(x_i)$	Względna niepewność pomiaru $u_{\mathrm{r}}(x_i)$, %	Względny wsp. wrażliwości p_i, %	Udział niepewności względnej $c_i\, u_{\mathrm{r}}(x_i)$, %	Udział niepewności $c_i\, u(x_i)$
Pomiar bezpośredni	m, g						
	a) a, cm						
	b) a, cm						
	a) b, cm						
	b) b, cm						
	a) c, cm						
	b) c, cm						
Pomiar pośredni	a) ρ, kg/m^3						
	b) ρ, kg/m^3						
Wynik oczekiwany	ρ^{T}, kg/m^3						
Ocena zgodności wyników							

Tabela 3. Bilans niepewności – porównanie obliczeń metodą elementarną i korzystając ze wzorów (9), (11) – MRZ

Wielkość mierzona	Wartość średnia	Niepewność pomiaru $u(x_i)$			Względna niepewność pomiaru $u_{\mathrm{r}}(x_i)$, %			Względny wsp. wrażliwości p_i, %			Udział niepewności względnej $c_i\, u_{\mathrm{r}}(x_i)$, %			Udział niepewności $c_i\, u(x_i)$		
		MEl		MRZ	MEl		MRZ	MEl		MRZ	MEl		MRZ	MEl		MRZ
m, g																
h, cm																
D, cm																
ρ, kg/m^3																
Porównanie z Tab. 1.																

Prostopadłościan

m, g																
a, cm																
b, cm																
c, cm																
ρ, kg/m^3																
Porównanie z Tab. 2.																

Porównanie z Tab. 1 lub 2. Odnieść do odpowiednich wartości w Tabeli 1 i 2 wyrażając w % zmianę względną (tj. 1 – (wartość w Tab. 3)/(wartość w Tab. 1)).