

	Temat:			Nr
	Wyznaczanie gęstości substancji dla prostopadłościanu i walca			ćwiczenia
Imię i nazwisko:	Rok, kierunek:	Specjalność:	Data wykonania pomiarów:	

I. Wprowadzenie do doświadczenia

1. Cel doświadczenia, przyrządy

Celem doświadczenia jest (wpisać).

Przyrządy: waga elektroniczna z rozdzielczością, suwmiarka cyfrowa, próbki substancji w kształcie prostopadłościanu i walca.

2. Wprowadzenie teoretyczne

(Wzór dla wielkości pomiarowej/yh. Rysunek, schemat układu – jeśli wynika to z charakteru doświadczenia.)

Gęstość substancji z której jest wykonana jest bryła (prostopadłościan, walec) wyznaczamy korzystając ze wzoru definicyjnego

$$\rho = \frac{m}{V}, \quad (1)$$

gdzie

m – masa bryły (prostopadłościanu, walca); V – objętość bryły przy czym:

objętość: prostopadłościanu – $V_p = abc$, walca – $V_w = \frac{\pi}{4} D_w^2 h$, kuli – $V_k = \frac{\pi}{6} D_k^3$.

a, b, c – wymiary prostopadłościanu, D_w, D_k – średnica walca, kuli; h – wysokość walca.

Do obliczeń wartości średnich pomiarów bezpośrednich stosujemy wzór na *średnią arytmetyczną* n wyników pomiarów:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad (2)$$

gdzie n – liczba pomiarów a x oznacza wielkość mierzoną.

3. Niepewności pomiaru

Pomiary bezpośrednie

Do obliczeń niepewności pomiarów bezpośrednich zastosowane będą następujące wzory: odchylenie standardowe wartości średniej

$$u_A(x) = s_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad (3)$$

całkowita niepewność standardowa pomiaru bezpośredniego

$$u(x) = \sqrt{u_A^2(x) + u_B^2(x)} = \sqrt{s_{\bar{x}}^2 + \frac{(\Delta_d x)^2}{3}} \quad (4)$$

gdzie

$\Delta_d x$ – niepewność (działki przyrządu) wzorcowania danego przyrządu

We wzorach x oznacza wielkość mierzoną bezpośrednio – m, a, b, c, h lub D .

Pomiary pośrednie

Złożoną niepewność standardową $u(y)$ – niepewność dla funkcji kilku zmiennych $y = f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_N)$ oblicza się korzystając z prawa przenoszenia niepewności pomiarów bezpośrednich.

Obliczanie niepewności $u(y)$ realizowane jest w dwóch krokach (ozn. MEI):

Krok 1.: obliczanie *udziałów niepewności* (korzystamy z zalecanego przez Przewodnik GUM¹ wzoru):

$$u_i(y) = \frac{1}{2} \left| f(x_1, \dots, x_i + u(x_i), \dots, x_N) - f(x_1, \dots, x_i - u(x_i), \dots, x_N) \right| \quad (5)$$

($u_i(y)$ – zmiana wartości funkcji f spowodowana zmianą x_i o $+u(x_i)$ i o $-u(x_i)$).

Krok 2.: obliczanie $u(y)$ jako sumy geometrycznej udziałów:

$$u(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^N u_i^2(y)}. \quad (6)$$

Uwaga 1. Mając obliczone wartości $u_i(y)$ i $u(x_i)$ możemy obliczyć współczynniki wrażliwości c_i ($c_i = u_i(y)/u(x_i)$) mające zastosowanie do określania, który pomiar wnosi większy wkład do niepewności złożonej;

Uwaga 2. Wygodnie jest korzystać z prawa propagacji niepewności względnych²

$$\frac{u(y)}{|y|} = \sqrt{\sum_{i=1}^N [p_i u_r(x_i)]^2}, \quad (7)$$

gdzie p_i – względny współczynnik wrażliwości: $p_i = c_i x_i / y$;

$u_r(x_i) = u(x_i)/x_i$ – względna niepewność pomiaru wielkości x_i .

Zaletą prawa przenoszenia niepewności względnych jest nie tylko ułatwienie obliczeń, lecz także bardziej przejrzysta analiza przyczyn niepewności. Obliczając niepewności względne wielkości wejściowych, widzimy, która z nich jest największa – z reguły to ona wnosi największy udział do niepewności złożonej.

Uwaga 3. W przypadku gdy zależność funkcyjna dla f ma postać jednomianu:

$y = k x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$, k – stała, wówczas względny współczynnik wrażliwości $p_i = \alpha_i$ i możemy zastosować wzór (7) na niepewność względną (ozn. PP%).

Wzór (1) dla gęstości możemy sprowadzić do postaci jednomianu zapisując:

dla prostopadłościanu:
$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{abc} = m^1 a^{-1} b^{-1} c^{-1}, \quad (8a)$$

dla walca:
$$\rho = m \left(\frac{\pi D^2 h}{4} \right)^{-1} = \frac{4}{\pi} m^1 h^{-1} D^{-2}, \quad (8b)$$

dla kuli:
$$\rho = m \left(\frac{\pi D^3}{6} \right)^{-1} = \frac{6}{\pi} m^1 D^{-3}. \quad (8c)$$

¹ *Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement*, ISO, Switzerland 1993, 1995; (dokument wydany w imieniu BIPM, IEC, IFCC, ISO, IUPAC, IUPAP, OML). Fundamentalny dokument zbiorowego autora – zespołu międzynarodowych organizacji naukowo-technicznych – dla ustanowienia procedury wyrażania niepewności pomiaru, jest wydany przez Międzynarodową Organizację Normalizacyjną (ISO) Publikacja jest udostępniona online: http://www.bipm.org/utis/common/documents/jcgm/JCGM_100_2008_E.pdf

² Niepewność względna w Przewodniku GUM nie ma oddzielnego oznaczenia. W sytuacjach nie powodujących nieporozumień będzie stosowany zapis z indeksem dolnym „r” tj. $u_i(y) \equiv u(y)/y$.

Zatem niepewności względne dla gęstości prostopadłościanu, walca i kuli są odpowiednio równe (ozn. PP%):

$$\frac{u(\rho_p)}{\bar{\rho}_p} = \sqrt{\left(\frac{u(m)}{\bar{m}}\right)^2 + \left(-\frac{u(a)}{\bar{a}}\right)^2 + \left(-\frac{u(b)}{\bar{b}}\right)^2 + \left(-\frac{u(c)}{\bar{c}}\right)^2}. \quad (9a)$$

$$\frac{u(\rho_w)}{\bar{\rho}_w} = \sqrt{\left(\frac{u(m)}{\bar{m}}\right)^2 + \left(-\frac{u(h)}{\bar{h}}\right)^2 + \left(-2\frac{u(D)}{\bar{D}}\right)^2}. \quad (9b)$$

$$\frac{u(\rho_k)}{\bar{\rho}_k} = \sqrt{\left(\frac{u(m)}{\bar{m}}\right)^2 + \left(-3\frac{u(D)}{\bar{D}}\right)^2}. \quad (9c)$$

Znając względne współczynniki wrażliwości p_i możemy obliczyć udziały niepewności z przytoczonego już wzoru:

$$u_i(\rho) = |c_i| u(x_i) = |p_i| u_r(x_i) \rho. \quad (10)$$

Zatem, z postaci (8) dla walca dla trzeciej mierzonej bezpośrednio wielkości – D , mamy $i = 3$, $p_i = -2$ i jej udział niepewności jest równy

$$u_D(\rho) = |-2| u_r(D) \rho = \left| -2 \frac{\rho}{D} u(D) \right| = \left| -2 \frac{4}{\pi} \frac{m}{h D^2} u(D) \right|,$$

stąd, współczynnik wrażliwości $c_D = |-8\rho/D| u(D) = |-8m/(\pi h D^2)|$.

Podobnie postępując możemy zapisać wzory dla pozostałych zmiennych – wielkości mierzonych bezpośrednio.

Obliczone wartości są potrzebne do zestawienia tzw. **bilansu niepewności pomiaru** co stanowi przyjętą formę raportowania w dokumentacjach.

Dla przykładu wyprowadzimy na podstawie wzoru (5) niepewność pomiaru dla gęstości walca. Mamy

$$\begin{aligned} u_m(\rho) &= \frac{1}{2} \left(\frac{m+u(m)}{V} - \frac{m-u(m)}{V} \right) = \frac{1}{2} \frac{2u(m)}{V} = \frac{u(m)}{V} = \frac{m}{V} \frac{u(m)}{m} = \rho \frac{u(m)}{m} \\ u_h(\rho) &= \frac{1}{2} \left(\frac{m}{V} \frac{h}{h+u(h)} - \frac{m}{V} \frac{h}{h-u(h)} \right) = \frac{1}{2} \frac{m}{V} \left(\frac{h}{h+u(h)} - \frac{h}{h-u(h)} \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{mh}{V} \cdot \frac{(h-u(h)) - (h+u(h))}{(h+u(h))(h-u(h))} = \frac{1}{2} \rho h \frac{-2u(h)}{h^2 - (u(h))^2} \approx -\rho \frac{u(h)}{h} \end{aligned}$$

Podobnie obliczając otrzymamy

$$u_D(\rho) \approx -\rho \frac{2u(D)}{D}.$$

W oznaczeniach został pominięty znacznik kreski dla średniej nad literą oznaczającą daną wielkość.

Zatem podstawiając do (6) otrzymujemy

$$u(\rho) = \sqrt{|u_m(\rho)|^2 + |u_h(\rho)|^2 + |u_D(\rho)|^2} = \sqrt{\rho^2 \left[\left(\frac{u(m)}{m}\right)^2 + \left(-\frac{u(h)}{h}\right)^2 + \left(-2\frac{u(D)}{D}\right)^2 \right]},$$

czyli odpowiadające temu co w (9b).

Podobnie postępując obliczamy niepewności pomiaru gęstości dla prostopadłościanu i kuli.

II. Pomiary

Podać niepewności graniczne pomiaru (typu B – systematyczne) wynikające z użycia suwmiarki i wagi.

$$\Delta_d a = \dots, \text{ itd.}; \quad \Delta_d m = \dots.$$

Wypisać dane pomiaru w postaci Tabeli.

III. Opracowanie wyników

Najpierw wyznacza się wartości z pomiaru bezpośredniego oraz ich niepewności pomiaru (wartości wpisać lub wkleić z arkusza kalkulacyjnego).

Następnie oblicza się wartości z pomiaru pośredniego oraz ich niepewności pomiaru (wartości wpisać lub wkleić z arkusza kalkulacyjnego).

Zapisać po zaokrągleniu wartość gęstości i jej niepewności oraz niepewność względną.

Zapisać również niepewności pomiaru otrzymane z obliczeń dla metody elementarnej.

Ocena zgodności wyników

Porównać wyniki korzystając z suwmiarki cyfrowej i analogowej. Odnieść się do danych tablicowych.

IV. Zestawienie wyników danych pomiarów bezpośrednich i pośrednich

Przedstawić zestawienie w postaci tabeli (oddzielnie dla prostopadłościanu i walca)

Tabela – patrz ostatnia strona

V. Dyskusja wyników

Uzyskana w doświadczeniu wartość gęstości prostopadłościanu (...)

VI. Wnioski

Najlepiej w punktach. Porównać niepewności otrzymane różnymi metodami: z prawa propagacji niepewności, metoda elementarna, metoda NKP (dane przedstawić w postaci tabeli).

Dopisek – porównywanie wyników

Chcąc porównać otrzymane wyniki z wynikiem tablicowym x^T , korzystamy z przedziałowego **kryterium zgodności wyników pomiarów**, czyli sprawdzamy czy dla naszych wyników spełniona jest nierówność:

$$|\bar{x} - x^T| \leq u(\bar{x}) + u(x^T). \quad (12)$$

Jeżeli powyższa nierówność nie zachodzi, należy zastąpić niepewność u przez *niepewność rozszerzoną* U , gdzie $U(x) = ku(x)$ a współczynnik k , w naszym przypadku należy przyjąć 2. Jeśli i wówczas ta nierówność nie jest spełniona to znaczy, że wyniki nie są zgodne.

Niepewność rozszerzona (*expanded uncertainty*) – zdefiniowana przez „wielkość określającą przedział wokół wyniku pomiaru, taki że można oczekiwać, iż obejmie on dużą część wartości, które w uzasadniony sposób można przyporządkować wielkości mierzonej.”

Obie niepewności są powiązane zależnością $U = ku$, gdzie k – współczynnik rozszerzenia. Współczynnik rozszerzenia k zależny jest od liczby pomiarów oraz poziomu ufności (określany jest często mianem *współczynnika Studenta-Fishera* $t_{n,\alpha}$), w większości przypadków przyjmujemy $k = 2$.

Nierówność (12) możemy stosować dla wartości otrzymanych różnymi metodami pomiarów, wówczas sprawdzamy czy spełniona jest nierówność:

$$|\bar{x} - \bar{x}'| \leq u(\bar{x}) + u(\bar{x}'). \quad (13)$$

Jeżeli powyższa nierówność nie zachodzi, postępujemy jak zostało opisane powyżej.

Tabela 1. Bilans niepewności wyznaczenia gęstości dla walca. Pomiar suwmiarką: analogową – a), cyfrową– b).

Rodzaj pomiaru	Symbol i jednostka wielkości mierzonej	Wartość średnia	Niepewność pomiaru $u(x_i)$	Względna niepewność pomiaru $u_r(x_i)$, %	Względny wsp. wrażliwości p_i , %	Udział niepewności względnej $c_i u_r(x_i)$, %	Udział niepewności $c_i u(x_i)$
Pomiar bezpośredni	m , g						
	a) h , cm						
	b) h , cm						
	a) D , cm						
	b) D , cm						
Pomiar pośredni	a) ρ , kg/m ³						
	b) ρ , kg/m ³						
Wynik oczekiwany	ρ^T , kg/m ³						
Ocena zgodności wyników							

T – dane tablicowe.

Tabela 2. Bilans niepewności wyznaczenia gęstości dla prostopadłościanu. Pomiar suwmiarką: analogową – a), cyfrową– b).

Rodzaj pomiaru	Symbol i jednostka wielkości mierzonej	Wartość średnia	Niepewność pomiaru $u(x_i)$	Względna niepewność pomiaru $u_r(x_i)$, %	Względny wsp. wrażliwości p_i , %	Udział niepewności względnej $c_i u_r(x_i)$, %	Udział niepewności $c_i u(x_i)$
Pomiar bezpośredni	m , g						
	a) a , cm						
	b) a , cm						
	a) b , cm						
	b) b , cm						
	a) c , cm						
	b) c , cm						
Pomiar pośredni	a) ρ , kg/m ³						
	b) ρ , kg/m ³						
Wynik oczekiwany	ρ^T , kg/m ³						
Ocena zgodności wyników							

Tabela 3. Bilans niepewności – porównanie obliczeń metodą elementarną i korzystając ze wzorów (5) – MEI oraz ze wzorów (9) – PP%

Wielkość mierzona	Wartość średnia	Niepewność pomiaru $u(x_i)$			Względna niepewność pomiaru $u_r(x_i)$, %			Względny współczynnik wrażliwości p_i , %			Udział niepewności względnej $c_i u_r(x_i)$, %			Udział niepewności $c_i u(x_i)$		
		MEI		PP%	MEI		PP%	MEI		PP%	MEI		PP%	MEI		PP%
m , g																
h , cm																
D , cm																
ρ , kg/m ³																
Porównanie z Tab. 1.																

Prostopadłościan

m , g																
a , cm																
b , cm																
c , cm																
ρ , kg/m ³																
Porównanie z Tab. 2.																

Porównanie z Tab. 1 lub 2. Odnieść do odpowiednich wartości w Tabeli 1 i 2 wyrażając w % zmianę względną (tj. $1 - (\text{wartość w Tab. 3})/(\text{wartość w Tab. 1})$).