	Temat: *Wyznaczanie gęstości substancji dla prostopadłościanu, walca i kuli*		Nr ćwiczenia
Imię i nazwisko:	Rok, kierunek:	Specjalność:	Data wykonania pomiarów:

I. Wprowadzenie do doświadczenia

1. *Cel doświadczenia, przyrządy*

Celem doświadczenie jest …. (wpisać).
Przyrządy: waga elektroniczna z rozdzielczością, suwmiarka cyfrowa, próbki substancji w kształcie prostopadłościanu i walca.

2. *Wprowadzenie teoretyczne*

(Wzór dla wielkości pomiarowej/ych. Rysunek, schemat układu – jeśli wynika to z charakteru doświadczenia.)
Gęstość substancji z której jest wykonana jest bryła (prostopadłościan, walec) wyznaczamy korzystając ze wzoru definicyjnego

$$\rho = \frac{m}{V}, \tag{1}$$

gdzie
m – masa bryły (prostopadłościanu, walca); V – objętość bryły przy czym:
objętość: prostopadłościanu – $V_\mathrm{p} = abc$, walca – $V_\mathrm{w} = \frac{\pi}{4} D_\mathrm{w}^2 h$, kuli – $V_\mathrm{k} = \frac{\pi}{6} D_\mathrm{k}^3$.
a, b, c – wymiary prostopadłościanu, D_w, D_k – średnica walca, kuli; h – wysokość walca.
Do obliczeń wartości średnich pomiarów bezpośrednich stosujemy wzór na *średnią arytmetyczną* n wyników pomiarów:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i, \tag{2}$$

gdzie n – liczba pomiarów a x oznacza wielkość mierzoną.

3. *Niepewności pomiaru*

Pomiary bezpośrednie

Do obliczeń niepewności pomiarów bezpośrednich zastosowane będą następujące wzory:
odchylenie standardowe wartości średniej

$$u_\mathrm{A}(x) = s_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} \tag{3}$$

całkowita niepewność standardowa pomiaru bezpośredniego

$$u(x) = \sqrt{u_\mathrm{A}^2(x) + u_\mathrm{B}^2(x)} = \sqrt{s_{\bar{x}}^2 + \frac{(\Delta_\mathrm{d} x)^2}{3}} \tag{4}$$

gdzie
$\Delta_\mathrm{d} x$ – niepewność (działki przyrządu) wzorcowania danego przyrządu
We wzorach x oznacza wielkość mierzoną bezpośrednio – m, a, b, c, h lub D.

Pomiary pośrednie

Złożoną niepewność standardową $u(y)$ – niepewność dla funkcji kilku zmiennych $y = f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_N)$ oblicza się korzystając z prawa przenoszenia niepewności pomiarów bezpośrednich.

Obliczanie niepewności $u(y)$ realizowane jest w dwóch krokach (ozn. MEl):

Krok 1.: obliczanie *udziałów niepewności* (korzystamy z zalecanego przez *Przewodnik GUM* [1] wzoru):

$$u_i(y) = \frac{1}{2}\left| f(x_1, \ldots, x_i + u(x_i), \ldots, x_N) - f(x_1, \ldots, x_i - u(x_i), \ldots, x_N)\right| \tag{5}$$

($u_i(y)$ – zmiana wartości funkcji f spowodowana zmianą x_i o $+u(x_i)$ i o $-u(x_i)$).

Krok 2.: obliczanie $u(y)$ jako sumy geometrycznej udziałów:

$$u(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} u_i^2(y)}\,. \tag{6}$$

Uwaga 1. Mając obliczone wartości $u_i(y)$ i $u(x_i)$ możemy obliczyć współczynniki wrażliwości c_i ($c_i = u_i(y)/u(x_i)$) mające zastosowanie do określania, który pomiar wnosi większy wkład do niepewności złożonej;

Uwaga 2. Wygodnie jest korzystać z prawa propagacji niepewności względnych[2]

$$\frac{u(y)}{|y|} = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \left[p_i\, u_{\mathrm{r}}(x_i)\right]^2}\ , \tag{7}$$

gdzie p_i – względny współczynnik wrażliwości: $p_i = c_i\, x_i / y$;

$u_{\mathrm{r}}(x_i) = u(x_i)/x_i$ – względna niepewność pomiaru wielkości x_i.

Zaletą prawa przenoszenia niepewności względnych jest nie tylko ułatwienie obliczeń, lecz także bardziej przejrzysta analiza przyczyn niepewności. Obliczając niepewności względne wielkości wejściowych, widzimy, która z nich jest największa – z reguły to ona wnosi największy udział do niepewności złożonej.

Uwaga 3. W przypadku gdy zależność funkcyjna dla f ma postać jednomianu: $y = k\, x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$, k – stała, wówczas względny współczynnik wrażliwości $p_i = \alpha_i$ i możemy zastosować wzór (7) na niepewność względną (ozn. PP%).

Wzór (1) dla gęstości możemy sprowadzić do postaci jednomianu zapisując:

dla prostopadłościanu: $$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{abc} = m^1 a^{-1} b^{-1} c^{-1}, \tag{8a}$$

dla walca: $$\rho = m\left(\frac{\pi}{4} D^2 h\right)^{-1} = \frac{4}{\pi}\, m^1\, h^{-1}\, D^{-2}, \tag{8b}$$

dla kuli: $$\rho = m\left(\frac{\pi}{6} D^3\right)^{-1} = \frac{6}{\pi}\, m^1\, D^{-3}. \tag{8c}$$

---

[1] *Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement*, ISO, Switzerland 1993, 1995; (dokument wydany w imieniu BIPM, IEC, IFCC, ISO, IUPAC, IUPAP, OML). Fundamentalny dokument zbiorowego autora – zespołu międzynarodowych organizacji naukowo-technicznych – dla ustanowienia procedury wyrażania niepewności pomiaru, jest wydany przez Międzynarodową Organizację Normalizacyjną (ISO) Publikacja jest udostępniona online: http://www.bipm.org/utils/common/documents/jcgm/JCGM_100_2008_E.pdf

[2] Niepewność względna w *Przewodniku GUM* nie ma oddzielnego oznaczenia. W sytuacjach nie powodujących nieporozumień będzie stosowany zapis z indeksem dolnym „r” tj. $u_{\mathrm{r}}(y) \equiv u(y)/y$.

Zatem niepewności względne dla gęstości prostopadłościanu, walca i kuli są odpowiednio równe (ozn. PP%):

$$\frac{u\ (\rho_{\mathrm{p}})}{\bar{\rho}_{\mathrm{p}}} = \sqrt{\left(\frac{u(m)}{\bar{m}}\right)^2 + \left(-\frac{u(a)}{\bar{a}}\right)^2 + \left(-\frac{u(b)}{\bar{b}}\right)^2 + \left(-\frac{u(c)}{\bar{c}}\right)^2}. \tag{9a}$$

$$\frac{u\ (\rho_{\mathrm{w}})}{\bar{\rho}_{\mathrm{w}}} = \sqrt{\left(\frac{u(m)}{\bar{m}}\right)^2 + \left(-\frac{u(h)}{\bar{h}}\right)^2 + \left(-2\frac{u(D)}{\bar{D}}\right)^2}. \tag{9b}$$

$$\frac{u(\rho_{\mathrm{k}})}{\bar{\rho}_{\mathrm{k}}} = \sqrt{\left(\frac{u(m)}{\bar{m}}\right)^2 + \left(-3\frac{u(D)}{\bar{D}}\right)^2}. \tag{9c}$$

Znając względne współczynniki wrażliwości p_i możemy obliczyć udziały niepewności z przytoczonego już wzoru:

$$u_i(\rho) = |c_i|\, u(x_i) = |p_i|\, u_{\mathrm{r}}(x_i)\, \rho. \tag{10}$$

Zatem, z postaci (8) dla walca dla trzeciej mierzonej bezpośrednio wielkości – D, mamy $i = 3$, $p_i = -2$ i jej udział niepewności jest równy

$$u_D(\rho) = |-2|\ u_{\mathrm{r}}(D)\rho = \left|-2\frac{\rho}{D}\right| u(D) = \left|-2\frac{4}{\pi}\frac{m}{hD^2}\right| u(D),$$

stąd, współczynnik wrażliwości $c_D = |-8\rho/\mathrm{D}|\, u(D) = |-8m/(\pi h D^2)|$.

Podobnie postępując możemy zapisać wzory dla pozostałych zmiennych – wielkości mierzonych bezpośrednio.

Obliczone wartości są potrzebne do zestawienia tzw. **bilansu niepewności pomiaru** co stanowi przyjętą formę raportowania w dokumentacjach.

Dla przykładu wyprowadzimy na podstawie wzoru (5) niepewność pomiaru dla gęstości walca. Mamy

$$u_m(\rho) = \frac{1}{2}\left(\frac{m+u(m)}{V} - \frac{m-u(m)}{V}\right) = \frac{1}{2}\frac{2u(m)}{V} = \frac{u(m)}{V} = \frac{m}{V}\frac{u(m)}{m} = \rho\frac{u(m)}{m}$$

$$\begin{aligned} u_h(\rho) &= \frac{1}{2}\left(\frac{m}{V}\frac{h}{(h+u(h))} - \frac{m}{V}\frac{h}{(h-u(h))}\right) = \frac{1}{2}\frac{m}{V}\left(\frac{h}{h+u(h)} - \frac{h}{h-u(h)}\right) \\ &= \frac{1}{2}\frac{mh}{V}\cdot\frac{(h-u(h))-(h+u(h))}{(h+u(h))(h-u(h))} = \frac{1}{2}\rho h\frac{-2u(h)}{h^2-(u(h))^2} \approx -\rho\frac{u(h)}{h} \end{aligned}$$

Podobnie obliczając otrzymamy

$$u_D(\rho) \approx -\rho\frac{2u(D)}{D}.$$

W oznaczeniach został pominięty znacznik kreski dla średniej nad literą oznaczającą daną wielkość.
Zatem podstawiając do (6) otrzymujemy

$$u(\rho) = \sqrt{|u_m(\rho)|^2 + |u_h(\rho)|^2 + |u_D(\rho)|^2} = \sqrt{\rho^2\left[\left(\frac{u(m)}{m}\right)^2 + \left(-\frac{u(h)}{h}\right)^2 + \left(-2\frac{u(D)}{D}\right)^2\right]},$$

czyli odpowiadające temu co w (9b).

Podobnie postępując obliczamy niepewności pomiaru gęstości dla prostopadłoscianu i kuli.

II. Pomiary

Podać niepewności graniczne pomiaru (typu B – systematyczne) wynikające z użycia suwmiarki i wagi.

$\Delta_d a = ...$, itd.; $\Delta_d m = ...$.

Wypisać dane pomiaru w postaci Tabeli.

III. Opracowanie wyników

Najpierw wyznacza się wartości z pomiaru bezpośredniego oraz ich niepewności pomiaru (wartości wpisać lub wkleić z arkusza kalkulacyjnego).
Następnie oblicza się wartości z pomiaru pośredniego oraz ich niepewności pomiaru (wartości wpisać lub wkleić z arkusza kalkulacyjnego).

Zapisać po zaokrągleniu wartość gęstości i jej niepewności oraz niepewność względną.

Zapisać również niepewności pomiaru otrzymane z obliczeń dla metody elementarnej.

Ocena zgodności wyników

Porównać wyniki korzystając z suwmiarki cyfrowej i analogowej. Odnieść się do danych tablicowych.

IV. Zestawienie wyników danych pomiarów bezpośrednich i pośrednich

Przedstawić zestawienie w postaci tabeli (oddzielnie dla prostopadłościanu i walca)

Tabela …. . – patrz ostatnia strona

V. Dyskusja wyników

Uzyskana w doświadczeniu wartość gęstości prostopadłościanu (…)

VI. Wnioski

Najlepiej w punktach. Porównać niepewności otrzymane różnymi metodami: z prawa propagacji niepewności, metoda elementarna, metoda NKP (dane przedstawić w postaci tabeli).

Dopisek – porównywanie wyników

Chcąc porównać otrzymane wyniki z wynikiem tablicowym x^{T}, korzystamy z przedziałowego ***kryterium zgodności wyników pomiarów***, czyli sprawdzamy czy dla naszych wyników spełniona jest nierówność:

$$\left|\bar{x} - x^{\mathrm{T}}\right| \le u(\bar{x}) + u(x^{\mathrm{T}}) . \tag{12}$$

Jeżeli powyższa nierówność nie zachodzi, należy zastąpić niepewność u przez *niepewność rozszerzoną U*, gdzie $U(x) = ku(x)$ a współczynnik k, w naszym przypadku należy przyjąć 2. Jeśli i wówczas ta nierówność nie jest spełniona to znaczy, że wyniki nie są zgodne.

Niepewność rozszerzona (*expanded uncertainty*) – zdefiniowana przez „wielkość określającą przedział wokół wyniku pomiaru, taki że można oczekiwać, iż obejmie on dużą część wartości, które w uzasadniony sposób można przyporządkować wielkości mierzonej."

Obie niepewności są powiązane zależnością $U = ku$, gdzie k – współczynnik rozszerzenia. Współczynnik rozszerzenia k zależny jest od liczby pomiarów oraz poziomu ufności (określany jest często mianem *współczynnika Studenta-Fishera* $t_{n,\alpha}$), w większości przypadków przyjmujemy $k = 2$.

Nierówność (12) możemy stosować dla wartości otrzymanych różnymi metodami pomiarów, wówczas sprawdzamy czy spełniona jest nierówność:

$$\left|\bar{x} - \bar{x}'\right| \le u(\bar{x}) + u(\bar{x}') . \tag{13}$$

Jeżeli powyższa nierówność nie zachodzi, postępujemy jak zostało opisane powyżej.

Tabela 1. Bilans niepewności wyznaczenia gęstości dla walca. Pomiar suwmiarką: analogową – a), cyfrową– b).

Rodzaj pomiaru	Symbol i jednostka wielkości mierzonej	Wartość średnia	Niepewność pomiaru $u(x_i)$	Względna niepewność pomiaru $u_r(x_i)$, %	Względny wsp. wrażliwości p_i, %	Udział niepewności względnej $c_i\,u_r(x_i)$, %	Udział niepewności $c_i\,u(x_i)$
Pomiar bezpośredni	m, g						
	a) h, cm						
	b) h, cm						
	a) D, cm						
	b) D, cm						
Pomiar pośredni	a) ρ, kg/m^3						
	b) ρ, kg/m^3						
Wynik oczekiwany	ρ^T, kg/m^3						
Ocena zgodności wyników							

T – dane tablicowe.

Tabela 2. Bilans niepewności wyznaczenia gęstości dla prostopadłościanu. Pomiar suwmiarką: analogową – a), cyfrową– b).

Rodzaj pomiaru	Symbol i jednostka wielkości mierzonej	Wartość średnia	Niepewność pomiaru $u(x_i)$	Względna niepewność pomiaru $u_r(x_i)$, %	Względny wsp. wrażliwości p_i, %	Udział niepewności względnej $c_i\, u_r(x_i)$, %	Udział niepewności $c_i\, u(x_i)$
Pomiar bezpośredni	m, g						
	a) a, cm						
	b) a, cm						
	a) b, cm						
	b) b, cm						
	a) c, cm						
	b) c, cm						
Pomiar pośredni	a) ρ, kg/m^3						
	b) ρ, kg/m^3						
Wynik oczekiwany	ρ^{T}, kg/m^3						
Ocena zgodności wyników							

Tabela 3. Bilans niepewności – porównanie obliczeń metodą elementarną i korzystając ze wzorów (5) – MEl oraz ze wzorów (9) – PP%

Wielkość mierzona	Wartość średnia	Niepewność pomiaru $u(x_i)$			Względna niepewność pomiaru $u_{\mathrm{r}}(x_i)$, %			Względny współczynnik wrażliwości p_i, %			Udział niepewności względnej $c_i\, u_{\mathrm{r}}(x_i)$, %			Udział niepewności $c_i\, u(x_i)$		
		MEl		PP%	MEl		PP%	MEl		PP%	MEl		PP%	MEl		PP%
m, g																
h, cm																
D, cm																
ρ, kg/m^3																
Porównanie z Tab. 1.																
Prostopadłościan																
m, g																
a, cm																
b, cm																
c, cm																
ρ, kg/m^3																
Porównanie z Tab. 2.																

Porównanie z Tab. 1 lub 2. Odnieść do odpowiednich wartości w Tabeli 1 i 2 wyrażając w % zmianę względną (tj. 1 – (wartość w Tab. 3)/(wartość w Tab. 1)).