Rozdział IX.

ELEMENTY RACHUNKU PRAWDOPODOBIEŃSTWA

1. Podstawowe wiadomości z rachunku prawdopodobieństwa.

1.1. Pojęcie prawdopodobieństwa. Podstawowe pojęcia.

Na wstępie zostanie podanych kilka podstawowych pojęć rachunku prawdopodobieństwa.

Zdarzeniem losowym Z nazywamy takie zdarzenie, które przy określonym zespole warunków może wystąpić lub może nie wystąpić. Natomiast zespół czynności, w wyniku których może zajść zdarzenie Z, nazywamy doświadczeniem D.

Przykład 1.

Rzucamy kostkę do gry. Jest to doświadczenie, w wyniku którego może wyjść liczba oczek od 1 do 6. Wyrzucanie liczby oczek np. 6 jest zdarzeniem losowym Z, które może zajść w wyniku doświadczenia D polegającego na rzuceniu kostki.

Zdarzeniem elementarnym nazywamy wszystkie wyniki doświadczenia, które możemy uważać za jedynie możliwe i jednakowo możliwe.

Przykład 2.

Jeżeli kostka do gry z przykładu 1 jest zrobiona prawidłowo i rzucamy ją z niezbyt małej wysokości, to zdarzeniami elementarnych będą wyrzucenia liczb oczek 1,2,3,4,5,6.

Zdarzeniami elementarnymi sprzyjającymi nazywamy te zdarzenia elementarne, przy których zachodzi oczekiwane zdarzenie Z.

Przykład 3.

Jeżeli przy rzuceniu kostki do gry zdarzenie Z polega na otrzymaniu nieparzystej liczby oczek, to zdarzeniami elementarnymi będą wyniki 1,3,5.

Zdarzenie losowe Z, które realizuje się przy każdym zespole zdarzeń elementarnych, nazywamy z d a r z e n i e m   p e w n y m. Natomiast zdarzenie losowe Z, które nie zachodzi przy żadnym zespole zdarzeń elementarnych, nazywamy z d a r z e n i e m   n i e m o ż l i w y m.

Przykład 4.

Zdarzeniem pewnym przy rzucie kostką do gry będzie wyrzucenie liczby oczek równej 1 lub 2 lub 3, ... lub 6, natomiast zdarzeniem niemożliwym będzie wyrzucenie liczby oczek większej niż 6.

Zdarzenie losowe polegające na tym, że nie zajdzie zdarzenie losowe Z, nazywamy z d a r z e n i e m   p r z e c i w n y m   d o   z d a r z e n i a   Z i oznaczamy $\bar{Z}$. Zauważmy, że zdarzenie losowe polegające na tym, że zajdzie zdarzenie Z lub zdarzenie $\bar{Z}$, jest zdarzeniem pewnym.

Przykład 5.

Jeżeli zdarzeniem Z będzie wyrzucenie nieparzystej liczby oczek, to zdarzeniem $\bar{Z}$ będzie wyrzucenie parzystej liczby oczek. Mówimy, że zdarzenia Z_1, Z_2 ... wzajemnie się wyłączają (bądź wykluczają), jeżeli zajście któregokolwiek z tych zdarzeń wyłącza możliwość jednoczesnego zajścia innego z tych zdarzeń.

Przykład 6.

W pudle są trzy kule białe, cztery kule czerwone i pięć kul zielonych. Niech Z_1 oznacza wyciągnięcie kuli białej, Z_2 - wyciągnięcie kuli czerwonej, a Z_3 - wyciągnięcie kuli zielonej. Zdarzenia te oczywiście wzajemnie się wyłączają, ponieważ wyciągnięcie kuli białej, tzn. zdarzenie Z_1, wyłącza wyciągnięcie kuli innego koloru.

Natomiast gdyby Z_1 oznaczało wyciągnięcie kuli czerwonej, a Z_2 wyciągnięcie kuli kolorowej, to takie dwa zdarzenia nie wyłączałyby się nawzajem. Rzeczywiście, przy wyciągnięciu kuli czerwonej odbyłyby się jednocześnie obydwa zdarzenia Z_1 i Z_2.

P r a w d o p o d o b i e ń s t w e m   z d a r z e n i a   l o s o w e g o   Z nazywamy stosunek liczby m zdarzeń elementarnych sprzyjających do ogólnej liczby n zdarzeń elementarnych. Jeżeli prawdopodobieństwo zdarzenia losowego Z oznaczymy przez P/Z/, to

$$\boxed{p = P(Z) = \frac{m}{n}} \tag{9.1}$$

Jest to tzw. k l a s y c z n a   d e f i n i c j a   p r a w d o p o d o b i e ń s t w a. Zauważmy, że prawdopodobieństwo zdarzenia pewnego jest równe 1, a zdarzenia niemożliwego jest równe 0. Natomiast prawdopodobieństwo dowolnego zdarzenia losowego Z jest zawarte w granicach

$$0 \leqslant P(Z) \leqslant 1 \tag{9.2}$$

Przykład 7.

Wróćmy do przykładu 3, gdzie zdarzeniem Z było wyrzucenie nieparzystej liczby oczek przy rzucie kostką do gry.
Mamy więc $m = 3$, $n = 6$, zatem

$$P(Z) = \frac{m}{n} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Przykład 8.

W przykładzie 6 przez Z_1 oznaczyliśmy zdarzenie polegające na wyciągnięciu kuli białej, przez Z_2 - kuli czerwonej, a przez Z_3 - kuli zielonej. Mamy tu

$$P(Z_1) = \frac{3}{12}, \quad P(Z_2) = \frac{4}{12}, \quad P(Z_3) = \frac{5}{12}$$

1.2. Działania na zdarzeniach

Zdarzenie losowe Z, polegające na tym, że zajdzie zdarzenie Z_1 lub zdarzenie Z_2, nazywamy sumą zdarzeń Z_1 i Z_2 i oznaczamy przez $Z_1 + Z_2$. Zatem

$$\boxed{Z = Z_1 + Z_2} \tag{9.3}$$

Można udowodnić twierdzenie:

Twierdzenie 1.

Prawdopodobieństwo sumy skończonej liczby wzajemnie wyłączających się zdarzeń losowych równa się sumie prawdopodobieństw tych zdarzeń, tzn.

$$\boxed{P(Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_n) = P(Z_1) + P(Z_2) + \ldots + P(Z_n)} \tag{9.4}$$

Przykład 9.

Wróćmy do przykładów 6 i 8. Prawdopodobieństwo, że wyjmiemy kulę białą lub czerwoną równa się $\frac{7}{12}$ (zdarzeń elementarnych sprzyjających jest tu 7).

Ale $\frac{7}{12} = \frac{3}{12} + \frac{4}{12}$ i po prawej stronie ostatniej równości jest suma prawdopodobieństw $P(Z_1) + P(Z_2)$.

Rozpatrzmy te zdarzenia losowe Z_1 i Z_2 odpowiednio prawdopodobieństwach $P(Z_1)$ i $P(Z_2)$. Mówimy, że zdarzenie Z_2 jest niezależne od zdarzenia Z_1, jeżeli prawdopodobieństwo zdarzenia Z_2, gdy wiadomo, że zaszło zdarzenie Z_1, równa się nadal $P(Z_2)$. Można udowodnić, że w tym przypadku również zdarzenie Z_1 jest niezależne od zdarzenia Z_2.

Jeżeli podane kryterium niezależności zdarzeń nie jest spełnione, to mówimy, że zdarzenia są zależne.

Przykład 10.

Z pudła, w którym znajdują się trzy kule białe i siedem czarnych, wyciągamy jedną kulę. Niech zdarzenie Z_1 polega na tym, że przy takim ciągnieniu kuli wyjdzie kula biała, a Z_2, że wyjdzie kula czarna. Oczywiście $P(Z_1) = \frac{3}{10}$ i $P(Z_2) = \frac{7}{10}$. Po pierwszym ciągnieniu kulę wkładamy z powrotem do pudła i ciągniemy po raz drugi. Ponieważ skład pudła pozostaje niezmieniony, to zdarzenia Z_1 i Z_2 są oczywiście niezależne.

Powróćmy do przykładu, w którym $P(Z_1) = \frac{3}{10}$ i $P(Z_2) = \frac{7}{10}$. Załóżmy teraz, że po pierwszym ciągnieniu kula nie powraca do pudła. W takim razie, jeżeli pierwsze ciągnienie dało kulę białą, to w pudle pozostanie 9 kul, przy czym 7 czarnych. Prawdopodobieństwo, że przy drugim ciągnieniu wyjdzie kula czarna, będzie się teraz równało $\frac{7}{9}$, co jest różne od $P(Z_2) = \frac{7}{10}$.

Zdarzenie losowe Z, polegające na tym, że zachodzi zarówno zdarzenie Z_1 jak i zdarzenie Z_2, nazywamy iloczynem zdarzeń Z_1 i Z_2 i oznaczamy $Z_1 \cdot Z_2$. Zatem

$$\boxed{Z = Z_1 \cdot Z_2} \tag{9.5}$$

Można udowodnić następujące twierdzenie:

Twierdzenie 2.

Prawdopodobieństwo iloczynu dwóch zdarzeń niezależnych równa się iloczynowi prawdopodobieństw tych zdarzeń, tzn.

$$\boxed{P(Z_1 \cdot Z_2) = P(Z_1) \cdot P(Z_2)} \tag{9.6}$$

Przykład 11.

Powróćmy do przykładu 10.

Niech Z_1 oznacza wyjęcie kuli białej, a Z_2 oznacza wyjęcie kuli czarnej. Liczbę zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu polegającemu na tym, że przy pierwszym ciągnieniu wyjmiemy kulę białą, a przy drugim ciągnieniu - kulę czarną, obliczymy, jeżeli zważywszy, że na każdą z możliwych do wyciągnięcia trzech kul białych przy pierwszym ciągnieniu może przypaść jedna z 7 kul czarnych przy drugim ciągnieniu. A więc $m = 3 \cdot 7 = 21$. Z drugiej strony, każdej z 10 kul, przy pierwszym ciągnieniu może przypaść każda z 10 kul przy drugim ciągnieniu. To daje $n = 10 \cdot 10 = 100$. Zatem szukane prawdopodobieństwo wynosi

$$P(Z_1 \cdot Z_2) = \frac{21}{100} = \frac{3}{10} \cdot \frac{7}{10} = P(Z_1) \cdot P(Z_2)$$

Inaczej przedstawia się sprawa przy zdarzeniach zależnych. Wprowadzimy najpierw pewne definicje.

Prawdopodobieństwo zdarzenia Z, które nie zależy od zajścia innych zdarzeń, nazywamy p r a w d o p o d o b i e ń s t w e m b e z w a r u n k o w y m. Natomiast prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia Z pod warunkiem, że zaszło inne zdarzenie Z_i, nazywamy p r a w d o p o d o b i e ń s t w e m w a r u n k o w y m i oznaczamy $P(Z \mid Z_i)$.

Można udowodnić następujące uogólnienie twierdzenia 2:

Twierdzenie 3.

Prawdopodobieństwo iloczynu dwóch dowolnych zdarzeń równe jest iloczynowi prawdopodobieństwa jednego zdarzenia przez prawdopodobieństwo warunkowe drugiego zdarzenia tzn.

$$\boxed{P(Z_1 \cdot Z_2) = P(Z_1) \cdot P(Z_2 \mid Z_1) = P(Z_2) \cdot P(Z_1 \mid Z_2)} \qquad (9.7)$$

Zauważmy, że jeżeli zdarzenia Z_1 i Z_2 są niezależne, to

$$\boxed{P(Z_2 \mid Z_1) = P(Z_2) \quad \text{i} \quad P(Z_1 \mid Z_2) = P(Z_1)}$$

i wówczas twierdzenie 3 sprowadza się do twierdzenia 2.

Przykład 12.

Rozważmy przykład 11, zakładając teraz, że po pierwszym ciągnieniu kula nie powraca do pudła. W takim razie jeżeli założymy, że pierwsze ciągnienie daje kulę białą, (zdarzenie Z_1), a drugie ciągnienie kulę czarną (zdarzenie Z_2), to na każdą z 3 kul białych przy pierwszym ciągnieniu może przypaść którakolwiek z 7 kul czarnych przy drugim ciągnieniu.

To daje $m = 3\cdot 7 = 21$. Ponieważ przy drugim ciągnieniu w pudle będzie tylko 9 kul, to rozumując jak poprzednio znajdziemy, że $n=10 \cdot 9=90$. Szukane prawdopodobieństwo równa się więc teraz

$$P(Z_1 \cdot Z_2) = \frac{3 \cdot 7}{10 \cdot 9} = \frac{21}{90}$$

Zauważmy, że $\frac{7}{9}$ jest to prawdopodobieństwo wyciągnięcia kuli czarnej, obliczone jest przy założeniu, że pierwsze ciągnięnie dało wynik pomyślny, tzn. kulę białą. Mamy więc zgodnie z twierdzeniem 3:

$$P(Z_1 \cdot Z_2) = P(Z_1)\cdot P(Z_2 | Z_1) = \frac{3}{10}\cdot\frac{7}{9} = \frac{21}{90}$$

Zauważmy, że zdarzenia losowe Z_1 i Z_2 wyłączają się wzajemnie, jeżeli prawdopodobieństwo ich iloczynu jest równe 0, tzn. $P(Z_1 \cdot Z_2) = 0$. W przypadku przeciwnym zdarzenia wzajemnie się nie wyłączają. W związku z tym można w następujący sposób uogólnić twierdzenie 1:

Twierdzenie 4.

Prawodopodobieństwo sumy dwóch dowolnych zdarzeń losowych równa się sumie prawodopodobieństw tych zdarzeń minus prawdopodobieństwo ich iloczynu, tzn.

$$\boxed{P(Z_1 + Z_2) = P(Z_1) + P(Z_2) - P(Z_1 \cdot Z_2)} \qquad (9.9)$$

1.3. Powtarzanie doświadczeń

Ma być wykonana seria n jednakowych doświadczeń, przy czym w wyniku każdego z tych doświadczeń może zajść zdarzenie losowe Z z prawdopodobieństwem stałym, równym p. Jeżeli w tej serii zdarzenie Z zajdzie k razy, to powiemy, że zdarzenie Z_k osiągnie częstość k w serii doświadczeń lub też częstość względną $\frac{k}{n}$.

Możemy postawić pytanie (przed rozpoczęciem doświadczeń), jakie jest prawdopodobieństwo, że w wyniku tej serii doświadczeń zdarzenie Z zajdzie k razy. Zagadnienie tego typu rozwiązane przez Bernoulliego nosi nazwę schematu Bernoulliego. Oznaczmy przez $\bar{Z}$ zdarzenie polegające na tym, że zdarzenie Z nie zachodzi (tzn. zdarzenie przeciwne). Ponieważ przy obliczaniu częstość zdarzenia Z w serii doświadczeń kolejność zdarzeń Z i przeciwnych $\bar{Z}$ nie jest brana pod uwagę, to wszystkie zdarzenia elementarne sprzyjające dla zrealizowania częstości k znajdziemy wypisując wszystkie możliwe kolejne wyniki doświadczeń takie jak np.

$$\boxed{Z,\ \bar{Z},\ \bar{Z},\ Z,\ \ldots\ Z,\ \bar{Z}} \qquad (9.9\ )$$

w których Z powtarza się k razy, a $\bar{Z}$ n-k razy. Z tego widzimy, że liczbę wszystkich możliwych wyników doświadczeń serii z częstością k zdarzenia Z znajdziemy obliczając liczbę wszystkich możliwych kombinacji n elementów wśród których jest k jednakowych Z (a więc n-k jednakowych $\bar{Z}$). Możemy powiedzieć, że liczba zdarzeń elementarnych sprzyjających dla częstości k równa się (porównaj z (1.8))

$$\boxed{\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}} \tag{9.10}$$

Rozważmy którąkolwiek kolejność wyników serii, np. taką jak w (9.9'). Ponieważ zdarzenia, które oznaczyliśmy przez Z i $\bar{Z}$ są niezależne, więc prawdopodobieństwo iloczynu zdarzeń (9.9') obliczymy stosując twierdzenie 2 o prawdopodobieństwie iloczynu zdarzeń niezależnych. Mamy więc

$$\boxed{p.q.q.p \ldots p.q = p^k q^{n-k}} \tag{9.11}$$

gdzie $q = 1 - p = P(\bar{Z})$.

Widzimy, że prawdopodobieństwo wszystkich możliwych kolejności wyników serii doświadczeń z częstościami k są jednakowe i równe (9.11). Ponieważ jest $\binom{n}{k}$ różnych kombinacji takich jak w (9.9'), w których litera Z figuruje k razy a litera $\bar{Z}$ figuruje n-k razy, więc częstość k osiąga się w $\binom{n}{k}$ seriach o prawdopodobieństwach równych $p^k q^{n-k}$.

Na podstawie reguły o dodawaniu prawdopodobieństw szukane prawdopodobieństwo częstości k znajdziemy dodając do siebie $\binom{n}{k}$ razy iloczyn (9.11). W ten sposób widzimy, że prawdopodobieństwo osiągnięcia częstości k zdarzenia Z w wyniku serii n jednakowych doświadczeń równa się

$$\boxed{P(k) = \frac{n!}{k!(n-k)!}\, p^k\, q^{n-k}} \quad (q=1-p) \tag{9.12}$$

Zauważmy, że prawdopodobieństwa wszystkich możliwych częstości k równają się odpowiednim wyrazom rozwinięcia dwumianu Newtona $(p + q)^n$ (porównaj z (1.11)). Ponieważ $p+q = 1$, więc $(p + q)^n = 1$, zatem

$$\sum_{k=0}^{n} P(k) = 1$$

Porównując ze sobą wyrazy dwumianu $(p+q)^n$ dojdziemy do wniosku, że częstość, o której mowa, jest liczbą naturalną najbardziej zbliżoną do iloczynu np.

Wprowadzając we wzorze (9.12) zamiast ich wartości przybliżone ze wzoru Stirlinga (porównaj z (1.7))

$$\boxed{n! = n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}} \tag{9.13}$$

można udowodnić, że jeżeli prawdopodobieństwo p nie jest bliskie 0 lub 1 i częstość k nie jest zbyt oddalona od iloczynu np, to można przyjąć, że

$$\boxed{P(k) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \exp\left\{-\frac{(k-np)^2}{2npq}\right\}} \qquad (9.14)$$

gdzie $\exp x = e^x$.

2. Zmienne losowe

2.1. Definicje

Zmienną X nazywamy z m i e n n ą l o s o w ą, jeżeli wszystkie jej możliwe wartości tworzą (skończony lub nieskończony) zbiór liczb $\{x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots\}$ i jeżeli przyjęcie każdej z tych wartości x_k jest zdarzeniem losowym Z_k $(=X=x_k)$ o określonym prawdopodobieństwie p_k.

Prawdopodobieństwo p jest funkcją x_k. Funkcję tą nazywamy r o z k ł a d e m z m i e n n e j l o s o w e j X.

Rozpatrzmy zmienną losową X. Oznaczmy przez Z zdarzenie, że X przyjmie wartość mniejszą niż x, tzn. $Z = (X < x)$. Zdarzenie Z ma określone prawdopodobieństwo, które jest funkcją x i które oznaczymy przez F(x). Zatem

$$\boxed{F(x) = P(X < x)} \qquad (9.15)$$

Funkcję F(x) nazywamy dystrybuantą zmiennej losowej X. Można udowodnić, że dystrybuanta jest funkcją lewostronnie ciągłą i niemalejącą oraz, że

$$\boxed{0 \leqslant F(x) \leqslant 1} \qquad (9.16)$$

$$\boxed{F(-\infty) = 0} \qquad \boxed{F(+\infty) = 1} \qquad (9.17)$$

2.2. Zmienne losowe skokowe

Z m i e n n ą l o s o w ą s k o k o w ą X nazywamy taką zmienną losową, która może przyjmować tylko skończoną lub przeliczalną ilość wartości.

Zazwyczaj zmienną losową skokową X określa się za pomocą następującej tablicy, zwanej t a b l i c ą r o z k ł a d u p r a w d o p o d o b i e ń s t w a:

X	x_1	x_2	...	x_n	...
P	p_1	p_2	...	p_n	...

Zauważmy, że zawsze

$$p_1 + p_2 + \dots + p_n + \dots = \sum_k p_k = 1$$

Dystrybuantę określamy za pomocą wzoru

$$\boxed{F(x) = P(X < x) = \sum_{x_k < x} p_k} \tag{9.18}$$

Przykład 1.

W punkcie 1.3 rozwiązaliśmy zagadnienie, jakie jest prawdopodobieństwo, że w wyniku serii n jednakowych doświadczeń jakieś zdarzenie Z zajdzie k razy. Innymi słowy, znaleźliśmy rozkład zmiennej losowej skokowej X przyjmującej wartości 0,1, ... n odpowiednio z prawdopodobieństwami.

$$\boxed{P(X = k) = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}\, p^k q^{n-k}} \tag{9.19}$$

gdzie $q = 1-p$. Zmienna ta nosi nazwę z m i e n n e j l o s o w e j o r o z k ł a d z i e d w u m i a n o w y m lub o r o z k ł a d z i e B e r n o u l l i e g o.

Dystrybuanta dla tego rozkładu ma postać

$$\boxed{F(x) = P(X < x) = \sum_{k < x} \frac{n!}{k!(n-k)!}\, p^k q^{n-k}} \tag{9.20}$$

Przykład 2.

Jeżeli we wzorze (9.19) przejdziemy do granicy przy $n \to \infty$, przy czym założymy, że prawdopodobieństwo p zmienia się w ten sposób, że $np = \lambda$, gdzie λ jest liczbą stałą, to wzór (9.19) przyjmie postać.

$$\boxed{P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!}\, e^{-\lambda}} \tag{9.21}$$

Zmienną losową o rozkładzie określonym wzorem (9.21) nazywamy z m i e n n ą l o s o w ą o r o z k ł a d z i e P o i s s o -

n a. Rozkład Poissona daje dobre przybliżenie rozkładu dwumianowego, gdy n jest dostatecznie duże, a p małe.

2.3. Zmienne losowe ciągłe

Załóżmy teraz, że zmienna losowa X ma dystrybuantę $F(x)$ różniczkowalną w każdym punkcie, tzn. istnieje taka funkcja $F(x) > 0$, że

$$\boxed{\frac{d\,F(x)}{dx} = f(x)} \tag{9.22}$$

Wówczas zmienną X nazywamy zmienną losową ciągłą, a funkcję $f(x)$ - funkcję gęstości prawdopodobieństwa lub po prostu gęstością.

Dla zmiennej losowej ciągłej dystrybuantę zapisujemy za pomocą wzoru

$$\boxed{F(x) = P(X < x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\ dt} \tag{9.23}$$

Z definicji dystrybuanty wynika, że

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ dx = 1} \tag{9.24}$$

Twierdzenie 2.

Prawdopodobieństwo, że zmienna losowa ciągła X przyjmie wartość z przedziału (a, b), jest równe

$$P\ (a \leqslant X \leqslant b) = \int_{a}^{b} f(x)\ dx \tag{9.25}$$

Przykład 3.

Zmienną losową X o funkcji gęstości określonej wzorem

$$f(x) = \begin{cases} c & \text{dla } a \leqslant x \leqslant b \\ 0 & \text{dla } x \text{ pozostałych} \end{cases} \tag{9.26}$$

nazywamy zmienną losową o rozkładzie prostokątnym lub jednostajnym.

Mamy

$$P\ (a \leqslant x \leqslant b) = \int_{a}^{b} c\ dx = 1$$

skąd

$$c = \frac{1}{b-a},$$

czyli funkcja gęstości ma postać

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{dla } a \leqslant x \leqslant b \\ 0 & \text{dla pozostałych } x \end{cases} \qquad (9.27)$$

a dystrybuanta ma postać

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{dla } a \leqslant x \leqslant b \\ 1 & \text{dla } x > b \end{cases} \qquad (9.28)$$

Przykład 4.

Zmienną losową X o funkcji gęstości określonej wzorem

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right] \qquad (9.29)$$

gdzie m i σ są to pewne stałe, nazywamy **zmienną losową o rozkładzie normalnym**. Rozkład normalny zależy od parametrów m i σ - zostaną one wyjaśnione później. Rozkład normalny o parametrach m i σ - oznacza się często symbolem N (m, σ).

2.4. Parametry rozkładu.

Rozkład zmiennej losowej najlepiej charakteryzuje dystrybuanta . Często jednak rozkład ten możemy scharakteryzować za pomocą kilku liczb tzw. **parametrów rozkładu**.

Wartością oczekiwaną lub wartością przeciętną, wartością średnią, nadzieją matematyczną zmiennej losowej X skokowej nazywamy liczbę

$$\boxed{EX = \sum_i x_i p_i} \qquad (9.30a)$$

W przypadku zmiennej ciągłej wartość oczekiwanej definiujemy wzorem

$$\boxed{EX = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\, dx} \qquad (9.30b)$$

Zachodzą następujące twierdzenia:

Twierdzenie 3.

Wartość oczekiwana stałej równa się tej stałej, tzn.

$$\boxed{EC = C} \tag{9.31}$$

Dowód.

Zmienna losowa X przyjmuje tylko jedną wartość, a mianowicie C, zatem prawdopodobieństwo przyjmowania tej wartości równe jest 1, tj.

$$EC = C \cdot 1 = C$$

Twierdzenie 4.

Wartość oczekiwana sumy dwóch zmiennych losowych równa się sumie wartości oczekiwanych tych zmiennych, tzn.

$$\boxed{E(X + Y) = EX + EY} \tag{9.32}$$

Twierdzenie 5.

Wartość oczekiwana iloczynu dwóch zmiennych losowych niezależnych równa się iloczynowi wartości oczekiwanych tych zmiennych, tzn.

$$\boxed{E(X \cdot Y) = EX \cdot EY} \tag{9.33}$$

Twierdzenie 6.

Jeżeli zmienna losowa X ma rozkład symetryczny i skończoną wartość oczekiwaną to prosta $y = EX$ jest osią symetrii tego rozkładu.
Twierdzenie to jest bardzo przydatne, gdyż pozwala szybko obliczyć wartość oczekiwaną w przypadku, gdy mamy wykres tego rozkładu, oczywiście gdy jest on symetryczny.

Zmienną losową Z określoną wzorem

$$\boxed{Z = X - EX} \tag{9.34}$$

nazywamy o d c h y l e n i e m z m i e n n e j l o s o w e j X.

Wariancję D^2X zmiennej losowej X nazywamy wartość oczekiwaną kwadratu jej odchylenia. Zatem dla zmiennej losowej skokowej x mamy

$$\boxed{D^2X = \sum_i (x_i - EX)^2 p_i} \tag{9.35a}$$

Natomiast dla zmiennej losowej ciągłej X mamy

$$\boxed{D^2X = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - EX)^2 f(x)\,dx} \tag{9.35b}$$

Przy obliczeniach wariancji często korzysta się ze wzoru

$$\boxed{D^2X = EX^2 - (EX)^2} \tag{9.36}$$

Pierwiastek kwadratowy z wariancji nazywamy **odchyleniem standardowym** (lub **odchyleniem średnim**) i oznaczamy literą σ.

Zatem

$$\boxed{\sigma = \sqrt{D^2X} = DX} \tag{9.37}$$

Zachodzą następujące twierdzenia:

Twierdzenie 7.

Wariancja stałej równa się 0, tzn.

$$\boxed{D^2C = 0} \tag{9.38}$$

Twierdzenie 8.

Wariancja iloczynu stałej przez zmienną losową X równa się iloczynowi kwadratu tej stałej przez wariancję zmiennej losowej X, tzn.

$$\boxed{D^2(CX) = C^2D^2X} \tag{9.39}$$

Twierdzenie 9.

Wariancja sumy dwóch zmiennych losowych niezależnych równa się sumie wariancji tych zmiennych, tzn.

$$\boxed{D^2(X + Y) = D^2X + D^2Y} \tag{9.40}$$

Przykład 5.

W przykładzie 1 rozpatrywaliśmy zmienną losową X o rozkładzie dwu - mianowym. Znajdźmy wartość oczekiwaną i wariancję tej zmiennej.

Mamy

$$\boxed{EX = Ek = \sum_{k=0}^{n} k \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{n(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} p p^{k-1} q^{n-k}}$$

Podstawiając $k = k' + 1$, $n = n' + 1$, mamy

$$EX = np \sum_{k'=0}^{n'} \frac{n'!}{k'!(n'-k')!} p^{k'} q^{n'-k'} = np\,(p+q)^{n'} = np\,1^{n'} = np$$

Podobnie postępując wyznaczamy wariancję

$$D^2X = D^2k = \sum_{k=0}^{n} (k - np)^2 \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k} = npq$$

Stąd

$$\sigma = \sqrt{npq}$$

Przykład 6.

Z definicji częstości względnej zdarzenia Z w serii n doświadczeń wynika, że

$$E\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n} Ek = \frac{np}{n} = p$$

Wzór ten jest bardzo ważny. Mianowicie wynika z niego, że p r z y w y k o n y w a n i u s e r i i d o ś w i a d c z e ń w a r t o ś ć o c z e k i w a n a c z ę s t o ś c i j e s t r ó w n a p r a w d o p o d o b i e ń s t w u z d a r z e n i a.

Podobnie znajdziemy, że

$$D^2\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{pq}{n}, \quad \text{skąd} \quad D\left(\frac{k}{n}\right) = \sqrt{\frac{pq}{n}}$$

Przykład 7.

Dla zmiennej losowej o rozkładzie Poissona (por. przykład 2) mamy

$$EX = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!} \lambda^k = e^{-\lambda} \sum_{k'=0}^{\infty} \frac{1}{k'!} \lambda \lambda^{k'} = \lambda e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = \lambda \qquad (9.41)$$

i podobnie postępując otrzymujemy, że

$$D^2X = \lambda \qquad (9.42)$$

Czyli

$$\sigma = \sqrt{\lambda}$$

Przykład 8.

Rozpatrzmy zmienną losową X o rozkładzie normalnym N (m, σ) (por przykład 4).

Mamy

$$EX = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right] dx = m \qquad (9.43)$$

oraz podobnie

$$D^2X = \sigma^2 \qquad i \qquad \sqrt{D^2X} = \sigma \qquad (9.44)$$

Ze wzorów tych wynika interpretacja probalistyczna wielkości m i σ występujących we wzorze (9.29) na rozkład normalny, mianowicie m jest wartością oczekiwaną, a σ - odchyleniem standardowym.

Ćwiczenie 1.

Wykazać, że dla rozkładu prostokątnego (por. przykład 3)

$$EX = \frac{1}{2}(a+b) \qquad D^2X = \frac{1}{12}(b-a)^2$$

Przykład 9.

Fabryka konserw wyprodukowała z tego samego surowca dwie partie konserw po 100 sztuk, w tej samej cenie. Po zważeniu każdej puszki wyniki pomiarów partii konserw X i Y przedstawiono w tablicach 1 i 2, gdzie x_i i y_k oznaczają mierzone w kilogramach ciężary puszek, n_i, n_k, ich liczności. Którą partię należy uznać za lepszą, tj. w której jest mniejszy rozrzut od nominalnej wagi ?

Tabl. 9.1)

Ciężary puszek konserw partii X

x_i	0,8	0,9	1	1,1	1,2	1,3,	1,4
n_i	10	24	36	20	7	2	1

(tabl. 9.2)

Ciężary puszek konserw partii Y

y_k	0,8	0,9	1	1,1	1,2	1,3	1,4
n_k	11	22	37	21	5	3	1

Rozwiązanie.

Przyjmijmy, że zmienna losowa dla kupujących z partii X przyjmuje wartość x_i z prawdopodobieństwami $n_i/100$, dla kupujących z partii Y wartość y_k z prawdopodobieństwami $n_k/100$.

Obliczamy wartości oczekiwane tych zmiennych losowych:

$$E(X) = 0{,}8\,\frac{10}{100} + 0{,}9\,\frac{24}{100} + 1\,\frac{36}{100} + 1{,}1\,\frac{20}{100} + 1{,}2\,\frac{7}{100} + 1{,}3\,\frac{2}{100} + 1{,}4\,\frac{1}{100} = 1$$

$$E(Y) = 0{,}8\,\frac{11}{100} + 0{,}9\,\frac{22}{100} + 1\,\frac{37}{100} + 1{,}1\,\frac{21}{100} + 1{,}2\,\frac{5}{100} + 1{,}3\,\frac{3}{100} + 1{,}4\,\frac{1}{100} = 1$$

Rezultat ten jest zrozumiały, gdyż do produkcji obu partii przygotowano tę samą ilość surowca. Widzimy przy tym, że nominalna waga każdej puszki powinna wynosić 1 kg oraz, że partia towaru jest tym lepsza, im mniejszy jest rozrzut od tej wartości. Formułując to w przyjętej przez nas terminologii, za lepszą przyjmiemy tę partię, która ma mniejszą wariancję.

Celem rozwiązania więc tego zadania należy obliczyć wariancje zmiennych losowych X i Y, a następnie wariancje te porównać. Korzystając ze wzoru (9.36), mamy

$$D^2(X) = E(X^2) - E^2(X) = 0{,}8^2\,\frac{10}{100} + 0{,}9^2\,\frac{24}{100} + 1^2\,\frac{36}{100} + 1{,}1^2\,\frac{20}{100} + 1{,}2^2\,\frac{7}{100} + 1{,}3^2\,\frac{2}{100} + 1{,}4\,\frac{1}{100} - 1 = 0{,}0146$$

$$D^2(Y) = E(Y^2) - E^2(Y) = 0{,}8^2\,\frac{11}{100} + 0{,}9^2\,\frac{22}{100} + 1^2\,\frac{37}{100} + 1{,}1^2\,\frac{21}{100} + 1{,}2^2\,\frac{5}{100} + 1{,}3^2\,\frac{3}{100} + 1{,}4^2\,\frac{1}{100} - 1 = 0{,}0098.$$

Ponieważ $D^2(X) > D^2(Y)$, za bardziej udaną (lepszą) należy uznać partię Y.

2.5. Zmienna losowa standaryzowana

Rozpatrzmy zmienną losową u określoną wzorem

$$\boxed{u = \frac{x - m}{\sigma}} \tag{9.45}$$

gdzie m = EX jest wartością oczekiwaną, a $\sigma = \sqrt{D^2X}$ odchyleniem standardowym. Łatwo stwierdzić, że Eu = 0, a $D^2u = 1$ (porównaj z przykładem 8). Zmienną losową mającą wartość oczekiwaną równą 0, a wariancję równą 1, nazywamy z m i e n n ą l o s o w ą s t a n d a r y z o w a n ą (l u b u n o r m o w a n ą).

Ćwiczenie 2.

Wykazać, że Eu = 0, $D^2u = 1$.

Jeżeli na zmiennej losowej o rozkładzie normalnym N (m, σ) dokonamy operacji standaryzowania, otrzymamy tzw. standaryzowany rozkład normalny N (0,1). Funkcja gęstości i dystrybuanta dla tego rozkładu są postaci

$$\boxed{f(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}u^2}} \tag{9.46}$$

$$\boxed{F(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{u} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt} \tag{9.47}$$

Na rys. 9.1 przedstawiono wykresy gęstości prawdopodobieństwa i dystrybuanty rozkładu normalnego standaryzowanego.

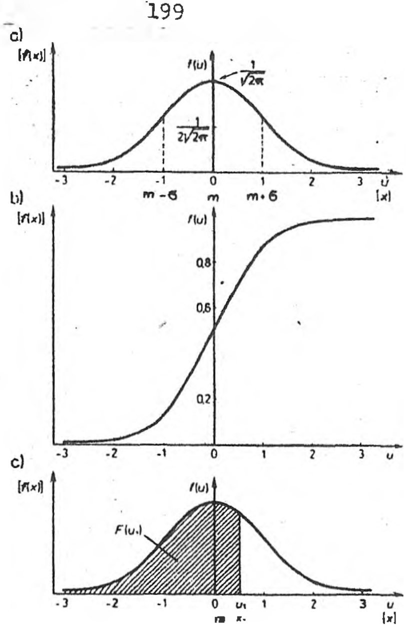
Wyrażenie

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right] \tag{9.48}$$

nosi nazwę gęstości prawdopodobieństwa rozkładu normalnego niestandaryzowanego. Podobnie funkcja

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{x} \exp\left[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right] dx \tag{9.49}$$

jest dystrybuantą rozkładu normalnego (niestandaryzowanego).



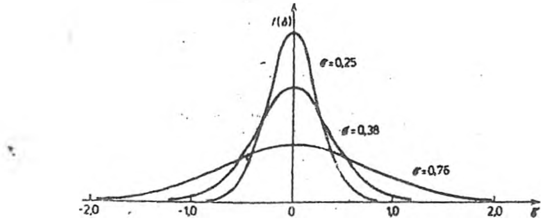
Rys. 9.1. Krzywa gęstości prawdopodobieństwa (a) i dystrybuanta (b) rozkładu normalnego. Rys. c przedstawia interpretację dystrybuanty jako pola powierzchni pod krzywą gęstości. Na rysunkach zaznaczono po dwie podziałki na osi odciętych: podziałkę dla zmiennej standaryzowanej u oraz dla zmiennej niestandaryzowanej x. Z rysunku widać, że standaryzacja sprowadza się do transformacji liniowej (zmiany skali) na osi odciętych.

Wykresy funkcji (9.48) i (9.49) zależą od parametrów rozkładu zmiennej losowej. Wykresy gęstości prawdopodobieństwa w rozkładzie normalnym sporządzamy zazwyczaj odkładając na osi rzędnych $f(\delta)$, a na osi odciętych δ, gdzie δ oznacza odchylenie od wartości oczekiwanej

$$\delta = x - m$$

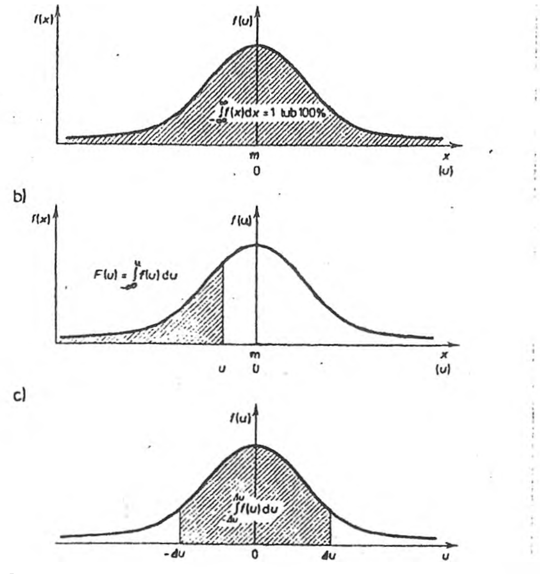
Kształt krzywej Gaussa (9.48), zwanej krzywą dzwonową, bardzo silnie zależy od odchylenia standardowego σ. Na przykład na rys 9.2. pokazano przebieg krzywej Gaussa dla kilku różnych wartości odchylenia standardowego. Im większe jest odchylenie standardowe, tym bardziej płaska jest krzywa, dla bardzo małych odchyleń standardowych krzywa jest bardzo stroma i odchylenia od wartości oczekiwanej są bardzo małe.

Dla rozkładu znormalizowanego, powierzchnia pod krzywą gęstości jest równa 1 lub 100% (rys. 9.3). Krzywa ta jest symetryczna względem osi $u = 0$ lub $x = m = E(X)$. Gęstość prawdopodobieństwa, czyli rzędną, przyjmuje największe wartości dla $x = m$ lub $u = 0$, co oznacza, że prawdopodobieństwo znalezienia wyniku bliskiego $x = m$ jest największe,



Rys. 9.2. Przebieg krzywej gęstości prawdopodobieństwa rozkładu normalnego niestandaryzowanego w zależności od odchylenia standardowego σ. Im większe jest odchylenie standardowe, tym szersza jest krzywa i bardziej spłaszczona.

a wartość $x = m = E(X)$ jest wartością najbardziej prawdopodobną, jest również wartością oczekiwaną w rozkładzie normalnym i tę właśnie wartość przyjmuje się jako wynik pomiaru. Miarą prawdopodobieństwa wystąpienia innych wyników, czyli rozrzutu statystycznego wyników jest odchylenie standardowe, charakteryzujące wartość krzywej gęstości rozkładu. Z tego powodu odchylenie standardowe jest umownie przyjętą miarą niepewności wyniku pomiarowego.



Rys. 9.3. Funkcja gęstości rozkładu normalnego jest unormowana, co oznacza, że powierzchnia pod krzywą oznaczająca prawdopodobieństwo łączne wszystkich wyników z przedziału $-\infty < x < \infty$ jest równe 1, czyli 100%. Standaryzacja nie zmienia kształtu krzywej Gaussa. Dystrybuanta (b) oznacza część powierzchni pod krzywą gęstości ograniczoną z prawej strony odciętą u (lub x). Rys. c przedstawia interpretację całki Laplace'a

W rozkładzie normalnym standaryzowanym odchylenie standardowe σ jest wielkością stałą równą 1. Celem lepszego zrozumienia roli odchylenia standardowego jako miary niepewności pomiarowych odpowiemy na pytanie jakie jest prawdopodobieństwo, że wartość zmiennej losowej mieści się między wartościami x_1 i x_2 spełniającymi warunek $|x_1 - m| = |x_2 - m|$, czyli w przedziale o szerokości $|x_2 - x_1|$ symetrycznie usytuowanym względem wartości oczekiwanej m. Oczywiście, zgodnie z definicją zmiennej losowej standaryzowanej (9.45) zachodzi

$$\frac{x_1 - m}{\sigma} = u_1, \quad \frac{x_2 - m}{\sigma} = u_2 \quad \text{oraz} \quad |u_1| = |u_2| = |u_i|$$

Prawdopodobieństwo $P(-u_i \leqslant u \leqslant u_i) = \Phi(u_i)$ obliczymy wykonując całkowanie wyrażenia (9.25) dla gęstości (9.46) w granicach od $-u_i$ do $+u_i$

$$\phi(u_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-u_i}^{u_i} \exp\left(-\frac{1}{2}u^2\right) du.$$

Uwzględniając symetrię krzywej rozkładu normalnego możemy napisać

$$\phi(u_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-u_i}^{0} \exp\left(-\frac{1}{2}u^2\right) du + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{u_i} \exp\left(-\frac{1}{2}u^2\right) du$$

Dokonując w pierwszej całce zmiany granic całkowania oraz znaku granicy, otrzymujemy

$$\phi(u_i) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{u_i} \exp\left(-\frac{1}{2}\cdot u^2\right) du \qquad (9.48)$$

Wartości całki (9.48) zwanej całką Laplace'a są stabelaryzowane. Dla przykładu w kolumnie 2 tab. 9.3 podano wartości całki (9.48) dla kilku wartości u_i. Kolumna 3 zawiera to samo prawdopodobieństwo wyrażone w %.

Funkcja Laplace'a jest funkcją nieparzystą ($\phi(-u) = -\phi(u)$) i o tej własności należy pamiętać przy posługiwaniu się tablicą funkcji Laplace'a.

Zgodnie z interpretacją krzywej Gaussa wartość $|u_i| = 1$ określa prawdopodobieństwo znalezienia wyniku pomiarowego w przedziale od minus odchylenia stardowego do plus odchylenia standardowego, czyli dla układu niestandaryzowanego, prawdopodobieństwo znalezienia wyniku

$$\boxed{P\left(|X - m| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}} \qquad (9.53)$$

3.2. Prawo wielkich liczb

Niech X będzie częstością względną k/n w serii doświadczeń. Dla zmiennej losowej X mamy (por. przykład 6) $m = p$, $\sigma^2 = pq/n$. Z nierówności (9.53) wynika, że

$$\boxed{P\left(\left|\frac{k}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2}} \qquad (9.54)$$

Niech będzie $\eta > 0$ dowolnie małą liczbą dodatnią. Przy odpowiednio dużym n będzie spełniona nierówność $pq/n\varepsilon^2 < \eta$. A więc jeżeli ε i η są to dwie dowolnie małe liczby dodatnie, to

$$P\left(\left|\frac{k}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \eta \qquad (9.55)$$

jeżeli ilość doświadczeń serii n jest większa od $pq/\eta\varepsilon^2$. Ponieważ η może być dowolnie małe, więc ostatnia nierówność może być też napisana w postaci

$$\boxed{\lim_{n \to \infty} P\left(\left|\frac{k}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = 1} \qquad (9.56)$$

Ostatnia nierówność nosi nazwę p r a w a w i e l k i c h l i c z b B e r n o u l l i e g o, które słownie wypowiadamy w sposób następujący:

Twierdzenie 2.

Przy liczbie n doświadczeń dążącej do nieskończoności, prawdopodobieństwo, że częstość względna zdarzenia Z odchyli się od prawdopodobieństwa tego zdarzenia o mniej niż dowolnie mała $\varepsilon > 0$, dąży do 1.

Z nierówności Czebyszewa wynika ważny wniosek, który nosi nazwę t w i e r d z e n i a C z e b y s z e w a. Niech X będzie zmienną losową o wariancji skończonej. Przypuśćmy, że mamy wykonać N jednakowych doświadczeń i że w wyniku tych doświadczeń X przybierze wartość $x_1, x_2, \ldots, x_N$.

Twierdzenie 3.

Jeżeli liczba doświadczeń N dąży do nieskończoności, to z prawdopodobieństwem dążącym do 1, średnia arytmetyczna

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_N}{N}$$

będzie dowolnie mało różniła się od wartości oczekiwanej $m = EX$.

W szczególności jeżeli mamy wykonać N serii po n jednakowych doświadczeń, w których prawdopodobieństwo zdarzenia Z jest stałe i jeżeli k_1, k_2 ... k_N oznaczają częstości zdarzenia Z w tych seriach , to

$$\boxed{\lim_{N\to\infty} P\left\{\left|\frac{k_1 + k_2 + k_N}{N} - np\right| < \varepsilon\right\} = 1} \qquad (9.57)$$

Jeżeli częstości względne w tych seriach oznaczymy przez p_1, p_2 , ... p_N, to z ostatniego wzoru wynika, że

$$\boxed{\lim_{N\to\infty} P\left\{\left|\frac{p_1 + p_2 + \ldots + p_N}{N} - p\right| < \varepsilon\right\} = 1} \qquad (9.58)$$

Prawo wielkich liczb, a zwłaszcza twierdzenie Czebyszewa, jest podstawą tzw. r e g u ł y ś r e d n i e j a r y t m e t y c z n e j, którą stale stosuje się przy różnych pomiarach. Powtarzając N razy pomiary pewnej wielkości X w jednakowych warunkach, otrzymujemy zwykle N różnych wyników x_1, x_2, ... x_N. Za wartość przybliżoną wielkości X bierzemy wtedy średnią arytmetyczną

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_N}{N}$$

Jeżeli pomiary są pozbawione błędów systematycznych, tzn. jeżeli wartości oczekiwane wyników poszczególnych pomiarów można uważać za równe, to zgodnie z prawem wielkich liczb przy dostatecznie wielkiej ilości pomiarów można oczekiwać z prawdopodobieństwem bliskim jedności, że wartość wielkości X dowolnie mało różni się od średniej arytmetycznej czynników pomiarów.

Pytania.

1. Co nazywamy zdarzeniem losowym, doświadczeniem ?

2. Jakie zdarzenie nazywamy pewnym, niemożliwym, przeciwnym do danego zdarzenia ?

3. Podaj klasyczną definicję prawdopodobieństwa?

4. Jakie są zdarzenia niezależne a jakie zależne ?

5. Czemu jest równe prawdopodobieństwo sumy wzajemnie wyłączających się zdarzeń losowych a czemu iloczyn zdarzeń niezależnych ?

6. Jakie prawdopodobieństwo nazywamy warunkowym, a jakie bezwarunkowym ?

7. Czemu jest równe prawdopodobieństwo sumy iloczynu dwóch dowolnych zdarzeń ?

8. Co nazywamy częstością i częstością względną zdarzenia w serii doświadczeń ?

9. Objaśnij schemat Bernoulliego i wzór go określający.

10. Co nazywamy zmienną losową, rozkładem zmiennej losowej i dystrybuantą ?

11. Co to jest zmienna losowa skokowa, ciągła ?

12. Jakie rozkłady noszą nazwę rozkładu Bernoulliego, Poissona, prostokątnego, normalnego ?

13. W jakich przypadkach rozkład Bernoulliego możemy zastąpić rozkładem Poissona ?

14. Podaj definicje parametrów rozkładu. Jakie zależności dla nich zachodzą ?

15. Czemu jest równa wartość oczekiwana i wariancja dla rozkładu Bernoulliego, Poissona, normalnego ?

16. Jak definiujemy zmienną losową standaryzowaną ? Czemu jest równa jej wartość oczekiwana i odchylenie standardowe ?

17. Podaj wyrażenia dla funkcji gęstości i dystrybuanty rozkładu normalnego standaryzowanego i niestandaryzowanego ?

18. Jaka jest rola odchylenia standardowego ?

19. Co opisuje całka Laplace'a i krzywa Gaussa ?

20. Co mówi reguła trzech sigm ?

21. Objaśnij nierówność Czebyszewa i prawo wielkich liczb.

22. Przy jakim warunku średnia arytmetyczna niewiele się różni od wartości oczekiwanej ?

23. Sformułuj regułę średniej arytmetycznej.

Zadania

1. Rzucamy dwoma kostkami do gry. Obliczyć prawdopodobieństwo, że suma oczek będzie:
   a) mniejsza niż pięć,
   b) większa lub równa 10.

2. W urnie znajduje się 6 kul białych i 10 czarnych. Obliczyć prawdopodobieństwo, że przy losowaniu dwóch kul wylosujemy parę kul czarnych.

3. W urnie mamy 20 kul czerwonych i 30 zielonych. Losujemy 5 kul. Jakie jest prawdopodobieństwo, że w wylosowanej piątce będą 3 kule czerwone i 2 kule zielone ?

4. W dwudziestoosobowej grupie 5 osób ma cechę x. Wybierzmy losowo z tej grupy 6 osób. Jakie jest prawdopodobieństwo, że co najmniej cztery z nich będą miały cechę x ?

5. Z 52 - kartowej talii losujemy jedną kartę. Jakie jest prawdopodobieństwo wylosowania karty czerwonej lub asa ?

6. Z talii 52 kart losujemy 4 karty. Obliczyć prawdopodobieństwo, że w wylosowanej czwórce będzie co najmniej jeden as.

7. W magazynie znajduje się 25 aparatów telewizyjnych, w tym 4 drugiego gatunku. Jakie jest prawdopodobieństwo, że gdy wybierzemy losowo 5 aparatów, co najmniej 3 będą drugiego gatunku ?

8. Zbadać niezależność zdarzeń A i B, jeśli
   a) A oznacza wylosowanie nieparzystej liczby oczek przy rzucie kostką, B - liczby oczek mniejszej niż cztery,
   b) A oznacza wylosowanie przy rzucie dwoma kostkami sumy oczek równej 7, B - że na pierwszej kostce wypadnie szóstka.

9. Do celu strzela trzech strzelców. Prawdopodobieństwa trafienia celu są odpowiednio równe 80%, 60% i 50%. Jakie jest prawdopodobieństwo trafienia celu, gdy wszyscy strzelają jednocześnie ?

10. W urnie znajduje się 10 kul białych i 20 czarnych. Losujemy kolejno bez zwracania dwie kule. Jakie jest prawdopodobieństwo, że za drugim razem wyciągniemy kulę białą ?

11. Zakład wyposażono w 50 obrabiarek pierwszego gatunku, 30 -drugiego i 20-trzeciego gatunku. Wiadomo przy tym, że prawdopodobieństwo awarii obrabiarki pierwszego gatunku jest równe 2%, drugiego 4%, trzeciego 10%. Jakie jest prawdopodobieństwo awarii obrabiarki przydzielonej pracownikowi do obsługi ?

12. Rzucamy 10 razy monetą (symetryczną). Jakie jest prawdopodobieństwo, że orzeł pojawi się dokładnie 4 razy ?

13. Rzucamy 8 razy kostką do gry. Jakie jest prawdopodobieństwo, że co najmniej 3 razy wypadnie szóstka ?

14. Wiadomo, że przy produkcji śrub 5% jest wybrakowanych. Pobrano losowo 20 śrub. Obliczyć prawdopodobieństwo, że co najmniej 18 będzie dobrych.

15. Obliczyć wartość oczekiwaną zmiennej losowej X, której funkcja gęstości jest określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & \text{dla } x \in [0,2] \\ 0 & \text{dla } x \notin [0,2] \end{cases}$$

16. Obliczyć wartość oczekiwaną i wariancję zmiennej losowej X, jeśli:

a) rozkład prawdopodobieństwa jest określony następująco:

x_i	-1	0	1	2	3	4
p_i	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{24}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{8}$

b) gęstość rozkładu przedstawiona jest za pomocą wzoru:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}x & \text{dla } x \in [1,3], \\ 0 & \text{dla } x \notin [1,3]. \end{cases}$$

17. Zmienne losowe X i Y są niezależne, przy czym $E(X) = 2$, $D^2(X)=1$, $E(Y) = 1$, $D^2(Y) = 4$. Obliczyć wartość przeciętną i wariancję zmiennych losowych

a) $Z_1 = X - 2Y$

b) $Z_2 = 2X - Y$.

18. Załóżmy, że w jeziorze było 15.000 ryb z których 1 000 było znaczonych. Wyłowiono z jeziora 100 ryb. Znaleźć wartość oczekiwaną liczby ryb znaczonych wśród złowionych.

19. Sklep ma możliwość zakupienia w hurtowni jednej z dwóch partii konserw po 100 sztuk każda o jednakowej cenie i jakości. Dane są poszczególne ciężary puszek partii A oraz B, przedstawione w poniższych tablicach, gdzie x_i, y_i oznaczają ciężary puszek. Którą partię puszek należy polecić ze względu na mniejszy rozrzut od nominalnej wagi ?

Ciężary puszek partii A

x_i	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3
n_i	3	2	36	21	28	9	1

Ciężary puszek partii B

x_i	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3
n_i	10	10	21	18	15	22	4