Temat: *Wahadło matematyczne – wyznaczanie wartości przyśpieszenia ziemskiego*			Nr ćwiczenia
Imię i nazwisko:	Rok, kierunek:	Specjalność:	Data wykonania pomiarów:

I. Wprowadzenie do doświadczenia

1. *Cel doświadczenia, przyrządy*

Celem doświadczenie jest …. (wpisać).

Przyrządy: wahadło – kula umocowana do nitki i zawieszona na haku, taśma miernicza, suwmiarka. stoper o rozdzielczości 0,01 s, (licznik impulsów – opcja).

2. *Wprowadzenie teoretyczne*

Przyjmijmy, że kulka o masie m_k i promieniu r jest zawieszona na nitce o długości l i masie m_n, a nitka od góry jest zaczepiona np. zawieszona na haku. Jeśli kulkę odchylimy z położenia równowagi będzie wykonywać drgania wokół poziomej osi przechodzącej przez punkt mocowania nitki na haku. Jeśli wychylenie jest małe drgania są harmoniczne i jeśli pominiemy rozmiary kulki i masę nitki to kwadrat okresu T drgań jest równy

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{g} L, \tag{1}$$

gdzie $L = l + r$ – długość wahadła, g – przyśpeszenie ziemskie.
Stąd

$$g = \frac{4\pi^2 L}{T^2}. \tag{2}$$

Często warunki przybliżenia nie są spełnione gdyż[1]

- kula nie jest punktem materialnym, dla kuli współczynnik poprawkowy na okres wynosi $1 + 0{,}4r^2/l^2$;
- nić nie jest nieważka, masa nici powoduje zmniejszenie okresu o czynnik $1 - (m_n/m)/12$;
- kąt wychylenia nie jest do zaniedbania, amplituda wychyleń θ (w rad) wnosi poprawkę do okresu wahań T, której pierwsze przybliżenie wynosi $\theta^2/16$.

Znajomość czynników poprawkowych pozwala tak zaplanować pomiar, by można je było pominąć. Po uwzględnieniu tych poprawek, wzór (2) na przyspieszenie ziemskie, jest postaci:

$$g = \frac{4\pi^2 l}{\left[T\left(1+\frac{1}{12}\theta^2\right)\left(1+\frac{2}{5}\frac{r^2}{l^2}\right)\left(1-\frac{1}{12}\frac{m_n}{m}\right)\right]^2}, \tag{3}$$

gdzie $m = m_k + m_n$ – masa wahadła.

II. PRZEBIEG WYKONANIA ĆWICZENIA

A. Metoda pomiarów.

Należy spełnić warunki założeń dla wzoru (2). Kąt wychylenia powinien być mały[2]. Pomiary sprowa–

[1] Oprócz wymienionych czynników do poprawek są i inne, np. wypór i opór powietrza.

[2] Wskazane aby dokonać przeliczeń dla kilku małych kątów aby mieć orientację jak duże są poprawki i jaka powinna być maksymalna amplituda whadła. Np. kąt 7° odpowiada w mierze łukowej 0,122 rad co w cm dla długości wahadła odpowiada długości łuku (w przybliżeniu odległość wychylonej kulki do pionu położenia równowagi): 50 – 6,1; 75 – 9,2; 100 – 12,2; 125 – 15,3; 150 – 18,3; 200 – 24,4; 250 – 30,5; 300 – 36,6; 350 – 42,3; 400 – 48,8.

dzają się do wyznaczenia okresu wahadła, długości wahadła tj. długości nitki i średnicy kulki lub odległości punktu zaczepienia wahadła oraz kulki do podłoża. Ponieważ dokładność wyznaczenia g powinna być co najmniej z trzema cyframi znaczącymi więc należy zaplanować pomiary z wystarczającą dokładnością. Należy zwrócić uwagę, że we wzorze (2) T jest w kwadracie oraz, że pomiar ręczny czasu drgań jest mało dokładny ze względu na uwarunkowania eksperymentatora przy włączeniu i wyłączenie stopera – $\Delta_e t$ = 0,4 s). W związku z tym **okres wahań należy wyznaczać jako przedział czasu między dwoma kolejnymi przejściami wahadła w tę samą stronę nad znacznikiem** znajdującym się pod lub za wahadłem w położeniu równowagi. Należy unikać takich punktów odniesienia, które są bliskie momentom zwrotnym w ruchu wahadła, gdyż wyznaczany przy ich wykorzystaniu okres będzie mniej dokładny (dlaczego?). Ponadto należy zmierzyć czas t kilku dla wielokrotności okresu – kT (jakiej – zaplanować).

Z (1) mamy, że zależność między T^2 a długością wahadła L jest liniowa. Należy zaplanować pomiary dla wybranych długości wahadła aby dokonać analizy graficznej.

Przygotuj tabelę pomiarową.

B. Wykonanie doświadczenia.

1. Zawiesić wahadło. Kula wahadła powinna znaleźć się kilka centymetrów nad podłogą. Pod znajdującym się w położeniu równowagi wahadłem, umieść na podłodze znacznik, np. metalowy pręt lub kartkę papieru z narysowaną wyraźną kreską. Wychyl wahadło z położenia równowagi, w kierunku prostopadłym do znacznika, o kąt (amplituda wychyleń) do zaplanowanej nie większej niż 7° i zwolnij je. Spróbuj różnych sposobów zwalniania wahadła i obserwuj je przez kilkanaście okresów. Zwróć uwagę, żeby wahadło nie krążyło po elipsie, kula wahadła nie „kiwała” się wokół własnego środka ciężkości, ani też nie obracała się wokół własnej osi. Wszystkie te efekty zmieniają okres drgań, który chcemy zmierzyć. Wykonaj kilka próbnych pomiarów. Przećwicz puszczanie kuli. „Dopracuj” się w miarę dobrego sposobu uruchamiania wahadła i wykonania pomiaru.
2. Wyznacz długość wahadła L. Dla wiszącego wahadła zmierz kilkakrotnie (5x) potrzebne długości:
   a) odległość między punktem zaczepienia wahadła a jego środkiem ciężkości

lub

   b) długość nitki (odległość od punktu zaczepienia wahadła do górnej powierzchni kulki i średnicę kulki

lub

   c) długość nitki (odległość od punktu zaczepienia wahadła do górnej powierzchni kulki) i odległość od punktu zaczepienia wahadła do dolnej powierzchni kulki

lub

   d) odległość od podłoża do punktu zaczepienia wahadła oraz od podłoża do środka kulki.

Uwaga: Najprostszym sposobem pod względem analizy niepewności jest pomiar bezpośredni (a), jednak jego dokładność może być mniejsza. W przypadku pomiaru pośredniego (b)-(d) mamy złożenie dwóch rozkładów. Przyjmując, że oba są prostokątnymi to w przypadku (c) i (d) otrzymujemy rozkład trójkątny (pomiar przyrządem z tą samą dokładnością), natomiast w przypadku (b) – rozkład trapezowy (pomiar suwmiarką jest z inną dokładnością niż pomiar miarką zwijaną).

3. Zmierz kilka razy czas t trwania k okresów drgań wg zaplanowanej wartości powtórzeń n.
   Przyjmij $k \geq 10$, $n \geq 7$. W przypadku dużego tłumienia wahadła i problemu zliczania liczby drgań można ograniczyć liczbę okresów do mniejszej, jednak nie mniej niż 10.
4. Powtórz pomiary dla innej długości wahadła (z zaplanowanych długości).
5. Wyznacz masę kulki i wahadła – o ile będzie to konieczne.

III. OPRACOWANIE WYNIKÓW POMIARÓW

A. Wyznaczenie wartości pomiarowych.

1. Obliczyć potrzebne wartości średnie: L, T, T^2.
2. Z wartości pomiarowych w tabeli wyznaczyć wartość średnią g dla danych długości
3. Obliczyć wartość g dla Szczecina [3] lub ją odszukać w danych tablicowych.
4. Zebrać dane wartości g z niepewnościami pomiaru od pozostałych osób wykonujących dośw. i obliczyć wartość średnią g dla ze wszystkich danych.
5. Przedstawić na wykresie zależność $T^2 = f(L)$ – na papierze milimetrowym (nanieść prostą) z zaznaczeniem odcinków niepewności o ile będzie to możliwe. Z wykresu wyznaczyć wartość g.
6. Stosując metodę regresji liniowej – komputerowo, wyznaczyć współczynniki nachylenia prostej.

B. Niepewności pomiaru.

1. Oblicz niepewność pomiaru wielkości mierzonych bezpośrednio: L i t lub l, d i t oraz m (o ile był pomiar), korzystając ze wzoru (A) (patrz dodatek *Niepewność pomiaru*), skąd dla $u(t)$ mamy.

$$u(t) = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)}\sum_{i=1}^{N}(t_i - \bar{t})^2 + \frac{(\Delta_d t)^2}{3} + 2\frac{(\Delta_e x)^2}{3}} \tag{4}$$

gdzie $N = kn$, natomiast
$\Delta_d x$ – niepewność graniczna stopera, jego dokładność;
$\Delta_e x$ – niepewność graniczna wynikająca z refleksu eksperymentatora, na włączanie i wyłączanie stopera, wartość typowa to 0,2 s.

2. Oblicz niepewność pomiaru wielkości mierzonych posrednio: L, T, T^2,
3. Oblicz niepewność pomiaru wartości g wyznaczonych w p. A.2, 4, 5, 6.
   Korzystając ze wzoru (B) i (C) lub (D) w dodatku:
   a) W przypadku pomiaru bezpośredniego L mamy ze wzoru (D):

$$\frac{u(g)}{\bar{g}} = \sqrt{\left(\frac{u(L)}{\bar{L}}\right)^2 + \left(-2\frac{u(t)}{\bar{t}}\right)^2}\,. \tag{5}$$

   Natomiast ze wzorów (B) i (C) można dokonać obliczeń w arkuszu kalkulacyjnym bezpośrednio wpisując formuły wg podanego wzoru (B) lub go częściowo upraszczając do postaci:

$$u_L(g) = \frac{4\pi^2 N^2}{\bar{t}^2} 2u(L), \qquad u_t(g) = 4\pi^2 N^2 \bar{L}\left(\frac{1}{(\bar{t}+u(t))^2} - \frac{1}{(\bar{t}-u(t))^2}\right), \tag{6}$$

   gdzie $N = kn$.

   Wówczas, ze wzoru (C) możemy obliczyć niepewność pomiaru g:

$$u(g) = \sqrt{(u_L(g))^2 + (u_t(g))^2}\,.$$

   b) W przypadku pomiaru pośredniego L, należy skorzystać ze wzoru (C), wówczas

$$u(L) = \sqrt{(u_l(L))^2 + (u_d(L))^2}\,, \tag{7}$$

   gdzie udziały niepewności $u_l(L)$ i $u_d(L)$ obliczamy zgodnie ze wzorem (B), co daje
   $u_l(L) = u(l)$ i $u_d(L) = u(d)$, natomiast ze wzoru (A) – niepewności standardowe $u(l)$ i $u(d)$.
4. Oblicz udziały niepewności.
5. Oblicz niepewności współczynników dla prostej regresji.
6. Oszacuj niepewność związaną ze skorzystaniem ze wzoru (2) zamiast (3).

C. Zestawienie wyników i niepewności pomiaru z udziałami niepewności.

1. Dokonać dyskusji wyników, porównać wartości dla g otrzymane w p. A. Odnieść otrzymaną wartość do wartości tablicowej g (w przypadku trudności z ustaleniem wartości przyjąć 9,814 m/s^2). Sprawdzić z kryterium zgodności – wzór (E). Zapisać wnioski i uwagi dotyczące doświadczenia. Odnieść się do stosowanego modelu, zaplanowanych wartości powtórzeń pomiarów, zapisać wnioski i uwagi dotyczące doświadczenia.

LITERATURA

1. Przykłady dla „*Wahadło matematyczne* (…)" w: A. Zięba: *Analiza danych w naukach ścisłych i technice*. PWN. Warszawa, 2014.
2. Przykład „*Wahadło matematycne* (…)" w: P. Bilski, M. Dobies, A. Kozak, M. Makrocka-Rydzyk: *Materiały do ćwiczeń ze wstępu do pracowni fizycznej. Normy ISO i matematyka w laboratorium*. Wydawnictwo Naukowe UAM; Poznań 2014.
3. Wikipedia, hasła: *wahadło*, *przyspieszenie ziemskie*.

*Dodatek

1. Niepewność pomiaru

Niepewność całkowita wielkości x mierzonej bezpośrednio:

$$u(x)=\sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2+\frac{(\Delta_{\mathrm{d}}x)^2}{3}+\frac{(\Delta_{\mathrm{t}}x)^2}{3}+u_{\mathrm{e}}^2(x)} \tag{A}$$

gdzie pierwszy składnik pod pierwiastkiem – niepewność standardowa średniej; $\Delta_{\mathrm{d}}x$ – niepewność wzorcowania (niepewność wynikająca z dokładności przyrządu); $\Delta_{\mathrm{t}}x$ – niepewności wyników zaczerpniętych z literatury, tablic lub kalkulatora; $u_{\mathrm{e}}(x)$ – niepewność standardowa eksperymentatora.

Złożoną niepewność standardową $u(y)$ – niepewność dla funkcji kilku zmiennych $y=f(x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_N)$ oblicza się korzystając z **prawa przenoszenia niepewności** pomiarów bezpośrednich nieskorelowanych w postaci

$$u(y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 u^2(x_i)}=\sqrt{\sum_{i=1}^{N}\left[c_i\,u(x_i)\right]^2}\equiv\sqrt{\sum_{i=1}^{N}u_i^2(y)}\,,$$

N – liczba wielkości mierzonych bezpośrednio, c_i – wsp. wrażliwości, $u_i(y)\equiv c_i\,u(x_i)$ – udziały niepewności.

Obliczanie niepewności $u(y)$ można dokonać bez odwoływania się do rachunku różniczkowego korzystając z metody elementarnej – wzoru wskaznego w *Przewodniku GUM* [3] poprzez obliczanie *udziałów niepewności*

$$u_i(y)=\frac{1}{2}\left|\,f(x_1,\ldots,x_i+u(x_i),\ldots,x_N)-f(x_1,\ldots,x_i-u(x_i),\ldots,x_N)\right| \tag{B}$$

($u_i(y)$ – zmiana wartości funkcji f spowodowana zmianą x_i o $+u(x_i)$ i o $-u(x_i)$).

i obliczanie $u(y)$ jako sumy geometrycznej udziałów:

$$u(y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{N}u_i^2(y)}\,. \tag{C}$$

W przypadku gdy zależność funkcyjna dla f ma postać jednomianu: $y=c\,x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\ldots x_n^{\alpha_n}$, c – stała, wówczas wygodnie jest korzystać z prawa propagacji niepewności względnych[4]

---

[3] *Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement*, ISO, Switzerland 1993, 1995; (dokument wydany w imieniu BIPM, IEC, IFCC, ISO, IUPAC, IUPAP, OML). Fundamentalny dokument zbiorowego autora – zespołu międzynarodowych organizacji naukowo-technicznych – dla ustanowienia procedury wyrażania niepewności pomiaru, jest wydany przez Międzynarodową Organizację Normalizacyjną (ISO) Publikacja jest udostępniona online: www.bipm.org/utils/common/documents/jcgm/JCGM_100_2008_E.pdf

[4] Niepewność względna w *Przewodniku GUM* nie ma oddzielnego oznaczenia. W sytuacjach nie powodujących nieporozumień można stosować zapis z indeksem dolnym „r" tj. $u_{\mathrm{r}}(y)\equiv u(y)/y$.

$$\frac{u(y)}{|y|} = \sqrt{\sum_{i=1}^{N}\left[\alpha_i\, u_r(x_i)\right]^2}\ , \tag{D}$$

gdzie $u_r(x_i) \equiv u(x_i)/|x_i|$ – względna niepewność pomiaru wielkości x_i.

Porównywanie wyników

Chcąc porównać otrzymane wyniki z innym wynikiem, np. tablicowym x^T, korzystamy z przedziałowego ***kryterium zgodności wyników pomiarów***, czyli sprawdzamy czy dla naszych wyników spełniona jest nierówność:

$$\left|\bar{x} - x^T\right| \le u(\bar{x}) + u(x^T)\,. \tag{E}$$

Jeżeli powyższa nierówność nie zachodzi, należy zastąpić niepewność u przez *niepewność rozszerzoną U*, gdzie $U(x) = k u(x)$ a współczynnik k, w naszym przypadku należy przyjąć 2. Jeśli i wówczas ta nierówność nie jest spełniona to znaczy, że wyniki nie są zgodne.

Niepewność rozszerzona (*expanded uncertainty*) – zdefiniowana przez „wielkość określającą przedział wokół wyniku pomiaru, taki że można oczekiwać, iż obejmie on dużą część wartości, które w uzasadniony sposób można przyporządkować wielkości mierzonej."

Obie niepewności są powiązane zależnością $U = ku$, gdzie k – współczynnik rozszerzenia. Współczynnik rozszerzenia k zależny jest od liczby pomiarów oraz poziomu ufności (określany jest często mianem *współczynnika Studenta-Fishera* $t_{n,a}$), w większości przypadków przyjmujemy $k = 2$

Regresja liniowa – klasyczna (metoda najmniejszych kwadratów)[5]

Jeżeli pomiędzy dwiema wielkościami fizycznymi występuje zależność liniowa to regresja liniowa jest prostą metodą wyznaczenia parametrów najlepiej dopasowanej prostej. Parametry prostej określonej równaniem $\boldsymbol{y = mx + b}$ wyznaczamy przy użyciu ogólnie dostępnych (dość złożonych) wzorów. Znając współczynniki m i b regresji liniowej oraz współczynnik korelacji (Pearsona) r można, korzystając z poniższych wzorów, obliczyć niepewności pomiaru (odchylenia standardowe) typu A (statystyczne)

$$u_A(m) = |m|\sqrt{\frac{1/r^2 - 1}{n-2}}, \qquad u_A(b) = u_A(m)\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\Big/ n}\,. \tag{F}$$

Wartości współczynników charakteryzujących prostą dla regresji liniowej szybko otrzymamy korzystając z funkcji wbudowanych w arkuszu kalkulacyjnym.

Współczynnik korelacji liniowej Pearsona r – bezwymiarowy wskaźnik z przedziału [–1, 1] określający stopień liniowej zależności dwóch zestawów danych. Składnia w Excelu: =PEARSON(tablica1;tablica2).

Współczynniki regresji liniowej, składnia w Excelu:

m: =NACHYLENIE(*znane_y*;*znane_x*); *b*: =ODCIĘTA(*znane_y*;*znane_x*)

Uwaga: zwrócić uwagę, że na pierwszym miejscu jest „*y*” a na drugim „*x*”.

Wartości: m i b, $u_A(m)$ i $u_A(b)$ oraz r^2 i $u(r)$ otrzymamy korzystając z bardziej wszechstronnej funkcji tablicowej REGLINP, która zwraca tablicę wartości. Składnia: =REGLINP(*znane_y*;*znane_x*;*stała*;*statystyka*).

Stała – argument opcjonalny; domyślna wartość PRAWDA oznacza normalne liczenie wartości wpółczynnika b; wartość FAŁSZ wymusza , to stała $b = 0$ (wartość m jest dopasowana do danych tak, aby spełnić równanie $y = mx$), tak jest w naszym przypadku.

Statystyka – argument opcjonalny. Jeżeli dla wyświetlenia wartości funkcji oznaczymy obszar „2 kolumny na 2 wiersze (3 wiersze)” i wartością jest:

– PRAWDA, to funkcja w kolejnych wierszach zwraca kolejno: m i b, $u_A(m)$ i $u_A(b)$ – przy zaznaczeniu obszaru z 2 wierszami (oraz r^2 i $u(r)$ przy zaznaczeniu obszaru z 3 wierszami).

– FAŁSZ lub argument został pominięty, to funkcja zwraca jedynie wartości współczynników m i b.

Aby użyć funkcję REGLINP trzeba: (i) zaznaczyć obszar w którym ma się znaleźć wynik; (ii) wpisać nazwę funkcji; (iii) zatwierdzić jej wprowadzanie kombinacją klawiszy *Ctrl+Shift+Enter*.

Na temat wszystkich statystyk, generowanych przez funkcję REGLINP można przeczytać w Pomocy.

Uwaga. W arkuszu kalkulacyjnym jest wykorzystana tzw. normalna metoda najmniejszych kwadratów, pojawia się pytanie na ile ta metoda, w porównaniu do prostej regresji ortogonalnej z rys. odręcznego, jest zgodna.

[5] np. P. Bilski, M. Dobies, A. Kozak, M. Makrocka-Rydzyk, *Materiały do ćwiczeń ze wstępu do pracowni fizycznej. Normy ISO i matematyka w laboratorium*. Wyd. Naukowe UAM; 2014; A. Zięba: *Analiza danych w naukach ścisłych i technice*. PWN. Warszawa, 2014.